

鈴木清太郎の元素合成論について III

内田俊郎*

1 はじめに

九州帝国大学教授をつとめた鈴木清太郎は、1920年代に化学平衡の熱力学を用いて恒星内部における熱平衡状態下での元素の存在比に関する先駆的な研究を行い、1927年から1931年の間に一連の論文を発表した (Suzuki 1927、1928a、1928b、1931a、1931b)。第二論文については「第6回天文学史研究会」で発表した。今回は「Further study on Thermo-dissociation of Atom-nuclei with a Remark on Jeans' New Theory of Stellar evolution」と題された第三論文 (Suzuki 1928b) の内容を中心に講演したが、本集録では講演では省略した鈴木が用いた式の導出を提示することとする。

2 恒星のエネルギー源に関する当時の考え

はじめに当時の恒星のエネルギー源に関する理解を概観する。小暮によると、1920年代には恒星のエネルギー源が原子核が関係する物理過程 (サブアトムックなプロセス) にあるという考えは広くみとめられていたようだが、実際にどのような過程からエネルギーが発生するのかについては、大別して三つの考え方があったとされる (小暮 2015)。

第一の考えは、核融合反応などの元素変換である。アストンの質量分析からヘリウムの質量が水素4個の質量より小さいことが明らかになったことをふまえ、エディントンは1920年に水素原子核4個が核融合してヘリウム原子核を生じる過程を星のエネルギー源として提唱していた。

第二の考えは質量消滅により、質量が直接、光のエネルギーに変換する過程である。ただし、ディラックがディラック方程式を提唱したのが1928年、さらに、ディラック方程式に現れる負のエネルギー解の解釈としてディラックが空孔理論を唱えて反粒子の概念が生まれたのが1930年のことであり、1920年代には粒子と反粒子の対消滅という概念はまだ無かったと思われる。陽子と電子、あるいは陽子となんらかの負の電荷を持つ粒子が衝突により消滅する可能性が考えられていたようである。

第三が放射性元素の崩壊である。この考えの一例としてジーンズの理論がある。ジーンズは星のエネルギー源としてウランより重い「超放射性元素」を想定し、超放射性元素の崩壊が星のエネルギー源であると主張した。さらに、通常の放射性崩壊の法則が温度や圧力とは無関係なことから、ジーンズは安定な星の内部でエネルギー発生率は温度や圧力とは無関係であると論じた。鈴木論文のタイトルにある Jeans' New Theory of Stellar evolution はこのジーンズの理論を指している。

1932年の中性子の発見以降、原子核物理学は急速に発展することになるが、鈴木の一連の研究は、小暮が「1920年代は収縮論の破綻から、熱核反応による進化論へ移行する苦悩の時代として、

*東洋大学、明治大学、千葉商科大学 非常勤講師

ラッセルを引き継いだエディントン、ジーンズらにも悩みは尽きなかったのである」と書いたように、不十分な原子核の理解の中で恒星のエネルギー源が模索された時代に行われたのである。

3 基礎方程式の導出

3.1 平衡条件

鈴木第三論文の前半は、第二論文で扱った水素とヘリウムの平衡



を再計算するとともに、ジーンズの理論を受けてラジウムの崩壊によるラドンの生成の熱平衡



を理想気体の気相における反応として論じたものである。ジーンズの理論に反して平衡組成の温度と圧力への依存を考察する点については、平衡組成に温度や圧力が影響するのはそれらの値がジーンズやエディントンが計算した値よりはるかに大きいときだと指摘している。

論文後半では、原子が有限な体積をもつことによる理想気体からのずれを問題にしているが、今回はこれについては議論しない。

化学平衡を熱力学で扱う場合、現在では定温定圧過程を仮定し化学ポテンシャルを用いて議論するのが普通であるが、鈴木論文では、定温定積過程を仮定している(と思われる)。このため、基礎方程式の導出が現在の標準的な手法とは異なるので、本稿で少し丁寧に導出しておくこととする。

統計力学の標準的な手法から、質量 m の N 個の粒子からなる理想気体のエントロピー S は、 k をボルツマン定数として、以下のサックル・テトロードの式で与えられる。(この式の導出は、例えば Kittel 1983。)

$$S = Nk \ln \left[\frac{V}{N} \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \right] + \frac{5}{2}Nk$$

この式を N と k をモル数 n と気体定数 R で書きかえ、理想気体の状態方程式 $PV = nRT$ を用いて、体積の代わりに圧力を変数とすると、1モルあたりのエントロピー s の表式として以下を得る。

$$s = \frac{5}{2}R \ln T - R \ln P + \frac{5}{2}R + R \ln \left[\frac{R^{5/2} (2\pi M)^{3/2}}{N_A^4 h^3} \right] \quad (3)$$

ここで h はプランク定数、 N_A はアボガドロ数、 F をヘルムホルツの自由エネルギー、 E を内部エネルギーとする。また、 P 、 V 、 T は慣用に従う。定温定積過程の熱平衡状態ではヘルムホルツの自由エネルギーは極小となるから、 $\Delta F = 0$ を要請する。一方、ヘルムホルツの自由エネルギーと内部エネルギーの関係 $F = E - TS$ と定温定積の仮定から

$$\Delta F = \Delta E - T\Delta S = 0$$

あるいは、

$$\Delta S = \frac{\Delta E}{T} \quad (4)$$

である。鈴木化学平衡下での議論はこの式に基づいている。

3.2 水素とヘリウムの平衡

まず、(1)の反応を考える。 ΔS と ΔE を以下のように計算する。

(1)の反応で1モルのヘリウムが反応したとする。 M_H を水素の質量、 P_H を水素の分圧として、生成する水素のエントロピー ΔS_H は(3)から

$$\Delta S_H = 4 \times \left(\frac{5}{2} R \ln T - R \ln P_H + \frac{5}{2} R + R \ln \left[\frac{R^{5/2} (2\pi M_H)^{3/2}}{N_A^4 h^3} \right] \right)$$

反応で減少したヘリウムのエントロピー ΔS_{He} は M_{He} をヘリウムの質量、 P_{He} をヘリウムの分圧として

$$\Delta S_{He} = \frac{5}{2} R \ln T - R \ln P_{He} + \frac{5}{2} R + R \ln \left[\frac{R^{5/2} (2\pi M_{He})^{3/2}}{N_A^4 h^3} \right]$$

よって、エントロピーの変化 $\Delta S = \Delta S_H - \Delta S_{He}$ は、

$$\Delta S = \frac{15}{2} R \ln T - R \ln \frac{P_H^4}{P_{He}} + \frac{15}{2} R + R \ln \left[\frac{(2\pi)^{9/2} R^{15/2}}{N_A^{12} h^9} \left(\frac{M_H^4}{M_{He}} \right)^{3/2} \right]$$

はじめヘリウムが n_0 個あり、そのうち水素に変わった割合を x とすると、ヘリウムの個数 n_{He} 、水素の個数 n_H 、粒子数の合計 n は、

$$n_{He} = n_0(1 - x), \quad n_H = 4n_0x, \quad n = n_0(1 + 3x)$$

これらを使って、水素の分圧 P_H 、ヘリウムの分圧 P_{He} は全圧力 P で

$$P_H = \frac{4x}{1 + 3x} P, \quad P_{He} = \frac{1 - x}{1 + 3x} P$$

とあらわせるので、

$$\Delta S = \frac{15}{2} R \ln T - R \ln \frac{4^4 P^3 x^4}{(1 + 3x)^3 (1 - x)} + \frac{15}{2} R + R \ln \left[\frac{(2\pi)^{9/2} R^{15/2}}{N_A^{12} h^9} \left(\frac{M_H^4}{M_{He}} \right)^{3/2} \right] \quad (5)$$

を得る。水素とヘリウム、どちらも単原子分子理想気体とすると生成する水素のエネルギーは、 C_v を定積モル比熱として

$$\Delta E_H = 4C_v T = 4 \times \frac{3}{2} RT = \frac{12}{2} RT$$

ヘリウムのエネルギーの減少は、結合エネルギーを考慮して、ヘリウム1モルあたりの1モルあたりの結合エネルギーを U として、

$$\Delta E_{He} = C_v T - U = \frac{3}{2} RT - U$$

であるから、 ΔE は

$$\Delta E = \Delta E_H - \Delta E_{He} = U + \frac{9}{2} RT \quad (6)$$

となる。(第二項は第二論文では無視されていた。) (5)と(6)を(4)に代入し、整理すると

$$\ln \frac{P^3 x^4}{(1 + 3x)^3 (1 - x)} = -\frac{U}{RT} + \frac{15}{2} \ln T + \ln \left[\frac{(2\pi)^{9/2} R^{15/2} e^3}{4^4 N_A^{12} h^9} \left(\frac{M_H^4}{M_{He}} \right)^{3/2} \right]$$

常用対数で書けば、

$$\log \frac{P^3 x^4}{(1+3x)^3 (1-x)} = -\frac{U \log e}{RT} + \frac{15}{2} \log T + \log \left[\frac{(2\pi)^{9/2} R^{15/2} e^3}{4^4 N_A^{12} h^9} \left(\frac{M_H^4}{M_{He}} \right)^{3/2} \right]$$

論文では圧力を atm 単位で表しているのので、 p を atm 単位で書いた圧力、 $p_0 = 1 \text{ atm}$ として

$$\log \frac{p^3 x^4}{(1+3x)^3 (1-x)} = -\frac{U \log e}{RT} + \frac{15}{2} \log T + \log \left[\frac{(2\pi)^{9/2} R^{15/2} e^3}{4^4 N_A^{12} h^9} \left(\frac{M_H^4}{M_{He}} \right)^{3/2} \right] - 3 \log p_0$$

としていることになる。鈴木論文では U の値として、 $2.604 \times 10^{12} \text{ J/mol}$ を使って最終的に

$$\log \frac{P^3 x^4}{(1+3x)^3 (1-x)} = -\frac{1.36 \times 10^{11}}{T} + 7.5 \log T + 7.2458$$

を導いたが、右辺第 3 項の定数については再現できなかった。

3.3 ラジウムの 崩壊の平衡

反応 (2) についても同様である。ラジウムに関する量に A、ラドンに B、粒子に C の添え字を付けて表すとすると、1 モルのラジウムが反応したとき、生成したラドンと 粒子のエントロピーはそれぞれ

$$\Delta S_B = \frac{5}{2} R \ln T - R \ln P_B + \frac{5}{2} R + R \ln \left[\frac{R^{5/2} (2\pi M_B)^{3/2}}{N_A^4 h^3} \right]$$

$$\Delta S_C = \frac{5}{2} R \ln T - R \ln P_C + \frac{5}{2} R + R \ln \left[\frac{R^{5/2} (2\pi M_C)^{3/2}}{N_A^4 h^3} \right]$$

反応が生じラジウムの減少したことによるエントロピーの減少は

$$\Delta S_A = \frac{5}{2} R \ln T - R \ln P_A + \frac{5}{2} R + R \ln \left[\frac{R^{5/2} (2\pi M_A)^{3/2}}{N_A^4 h^3} \right]$$

したがって、1 モルのラジウムが 崩壊したときのエントロピーの変化 ΔS は、 $\Delta S = \Delta S_B + \Delta S_C - \Delta S_A$ から、

$$\Delta S = \frac{5}{2} R \ln T - R \ln \frac{P_B P_C}{P_A} + \frac{5}{2} R + R \ln \left[\frac{R^{5/2} (2\pi)^{3/2}}{N_A^4 h^3} \left(\frac{M_B M_C}{M_A} \right) \right]$$

n_0 個のラジウムのうち、割合で x が崩壊するとラジウムの個数 n_A 、ラドンの個数 n_B 、粒子の個数 n_C 、および全粒子数 n は、それぞれ

$$n_A = n_0 (1-x), \quad n_B = n_C = n_0 x, \quad n = n_0 (1+x)$$

となるから、それぞれの成分の分圧は圧力を P として

$$P_A = \frac{1-x}{1+x} P, \quad P_B = P_C = \frac{x}{1+x} P$$

よって、 ΔS は

$$\Delta S = \frac{5}{2} R \ln T - R \ln \frac{P x^2}{1-x^2} + \frac{5}{2} R + R \ln \left[\frac{R^{5/2} (2\pi)^{3/2}}{N_A^4 h^3} \left(\frac{M_B M_C}{M_A} \right) \right] \quad (7)$$

ラドンと 粒子の生成によるエネルギーの増加、 ΔE_B 、 ΔE_C は、単原子分子理想気体と見なして、

$$\Delta E_B = \Delta E_C = \frac{3}{2}RT$$

反応の結果、減少するラジウムのエネルギー ΔE_A は

$$\Delta E_A = \frac{3}{2}RT - U$$

ただし、ここで (2) の反応は左辺から右辺に自発的に崩壊する反応だから、ラジウムの静止質量はラドンと 粒子の静止質量の和より大きく、 U は負の値を持つ。これらの結果から、

$$\Delta E = \Delta E_B + \Delta E_C - \Delta E_A = U + \frac{3}{2}RT \quad (8)$$

(7)、(8) を (4) に代入して以下を得る。

$$\ln \frac{P x^2}{1 - x^2} = -\frac{U}{RT} + \frac{5}{2} \ln T + \ln \left[\frac{R^{5/2} (2\pi)^{3/2} e}{N_A^4 h^3} \left(\frac{M_B M_C}{M_A} \right) \right]$$

常用対数で書けば、

$$\log \frac{P x^2}{1 - x^2} = -\frac{U \log e}{RT} + \frac{5}{2} \log T + \log \left[\frac{R^{5/2} (2\pi)^{3/2} e}{N_A^4 h^3} \left(\frac{M_B M_C}{M_A} \right) \right]$$

鈴木論文では U の値として、 $-4.841 \times 10^{11} \text{J/mol}$ を使い

$$\log \frac{P x^2}{1 - x^2} = \frac{2.528 \times 10^{10}}{T} + 2.5 \log T + 1.7372$$

を得たが、右辺第 3 項の定数についてはこちらも再現できなかった。

4 まとめ

定数項が再現できない等、筆者にはまだ得心がゆかない部分が残っている。そのため、本稿では鈴木清太郎の論文の式の導出を紹介した。どなたかチェックして遺漏を指摘して頂ければ深甚です。

参考文献

- Suzuki S. (1927) 「On the Thermo-dissociation of Atom-nuclei」 Proc. Im. Acad., **10** p650
 Suzuki S. (1928) 「On the Thermal Equilibrium of Dissociation of Atom-nuclei」
 Proc.Phys.Math.Soc.Japan, **10**, p166
 Suzuki S. (1928) 「Further study on Thermo-dissociation of Atom-nuclei with a Remark on
 Jeans' New Theory of Stellar evolution」 Proc.Phys.Math.Soc.Japan, **11**, p119
 Suzuki S. (1931) 「The Thermo-Equilibrium of Atom-nuclei at High Temperature」
 Proc.Phys.Math.Soc.Japan, **13**, p277
 Suzuki S. (1931) 「The Relative Abundance of Chemical Elements in White Dwarf and
 its Electrification」 Proc. Im. Acad., **7** p307
 小暮智一 (2015) 「現代天文学史」京都大学出版会
 Kittel C. (1983) 「熱物理学」丸善