

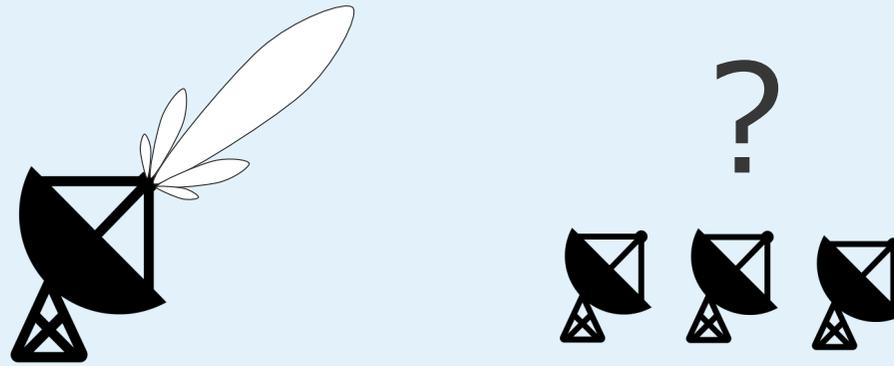


アルマデータ解析講習会  
電波干渉計イメージング

[ 中級編 ]

永井 洋  
(国立天文台アルマプロジェクト)

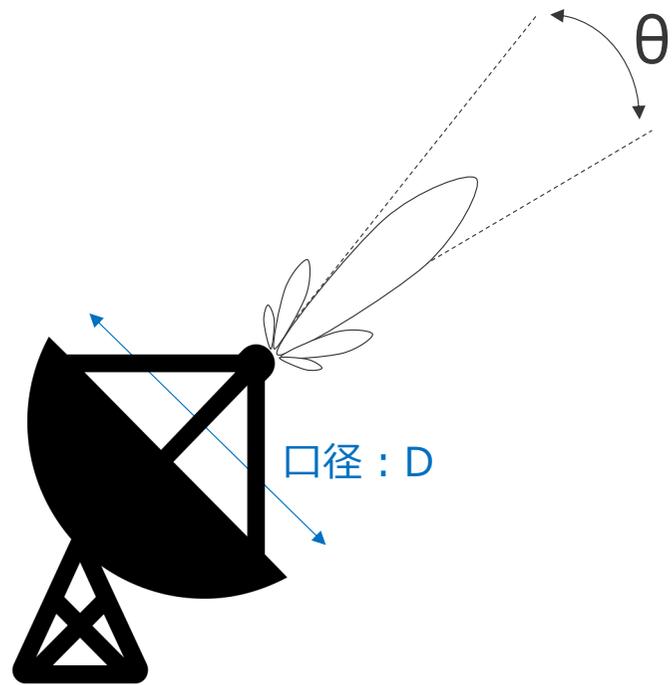




イメージングに入る前に：  
電波干渉計原理の「超」基礎

教科書第3章, 4.2章, 4.3章

## 単一鏡の応答

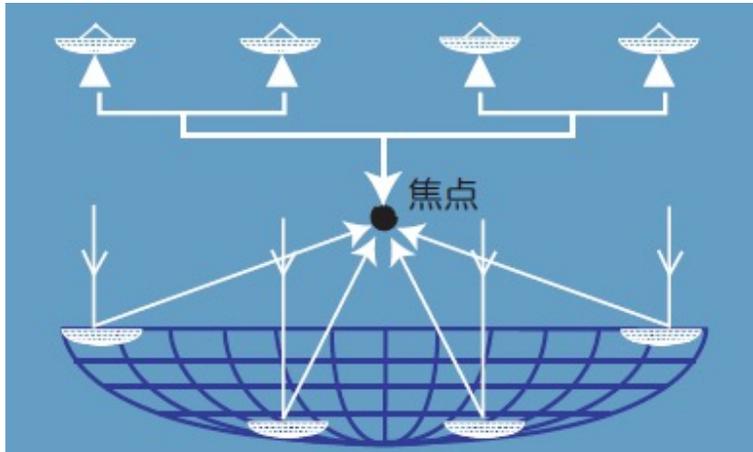


望遠鏡の解像度 (≒回折限界)

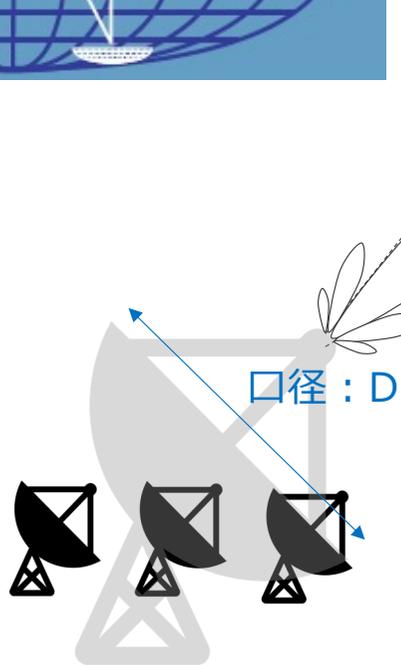
$$\theta = \lambda/D$$

( $\lambda$  : 観測波長)

## 干渉計の応答



複数の望遠鏡を用いて開口合成することで、望遠鏡間の距離（基線長）と等価の開口を持った望遠鏡の解像度を得ることができる  
⇒基線長が前頁のDに相当する

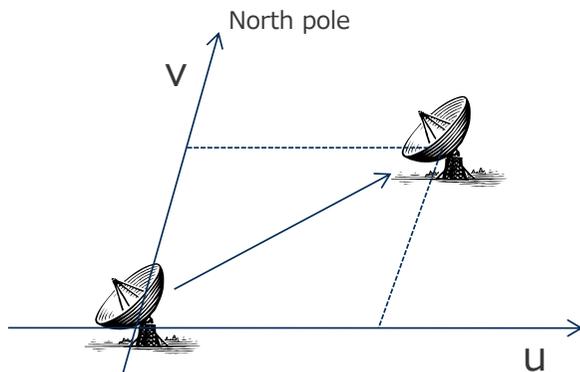


$$\theta = \lambda / D$$

(ただし、合成開口は穴ぼこだらけ。これが厄介。)

## 干渉計の基本観測方程式

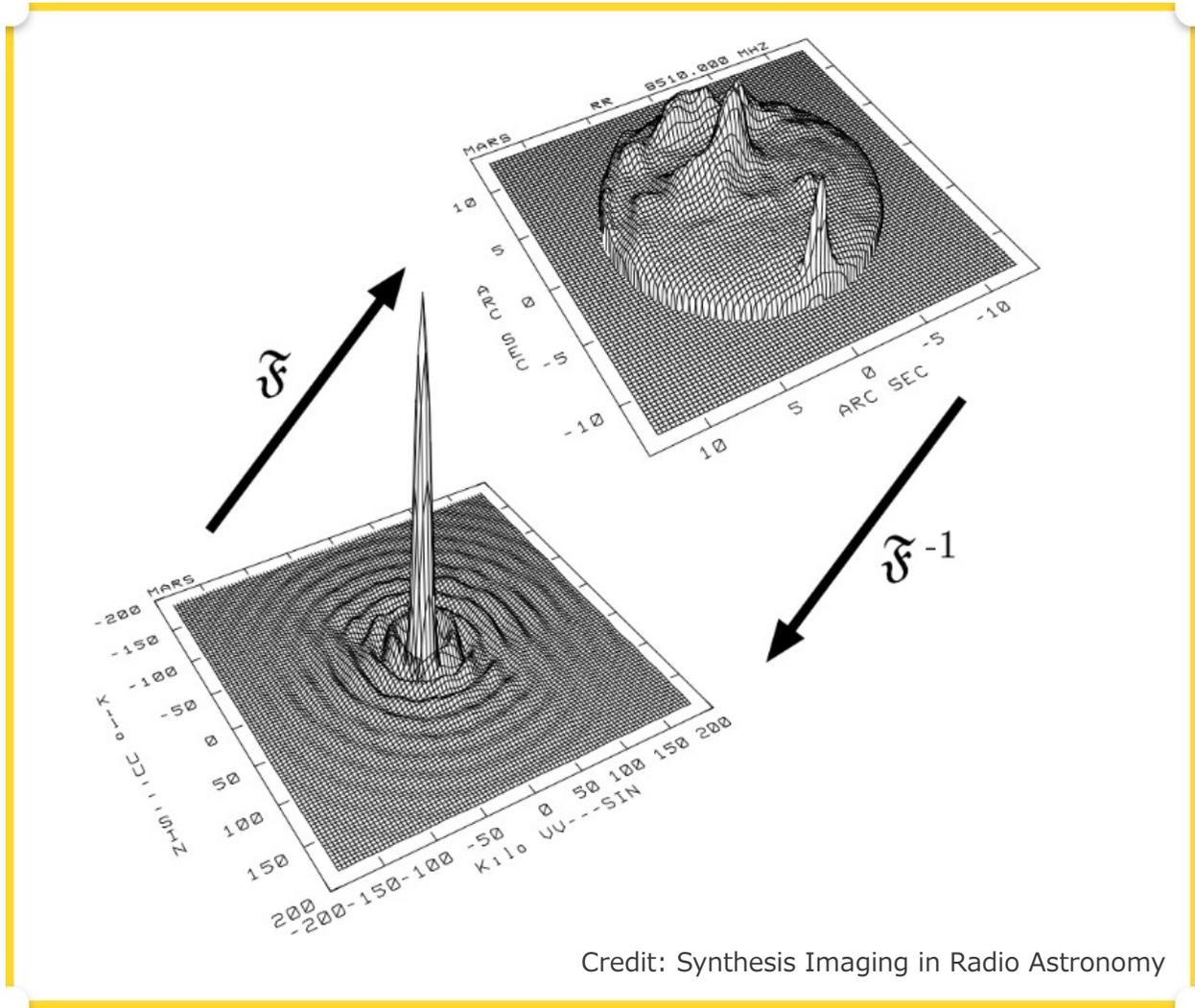
$$V(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(l, m) I(l, m) \exp(-2\pi i(ul + vm)) dl dm$$



※厳密には天体から見て常に同一平面にアンテナ群が存在しているわけではないので、空間周波数を表現するにはuv面に直交する軸wが必要になる。しかし、wの影響は微々たるものなので、無視をしても実際の観測にはほとんど影響しない

**A : アンテナの主ビーム応答、I: 天体の輝度分布、u, v: 空間周波数**

※より一般化すると、これはvan Citter-Zernikeの定理であり、単一鏡の応答も同様に記述できる（単一鏡面の照度分布のフーリエ変換が、主ビーム応答に相当する）

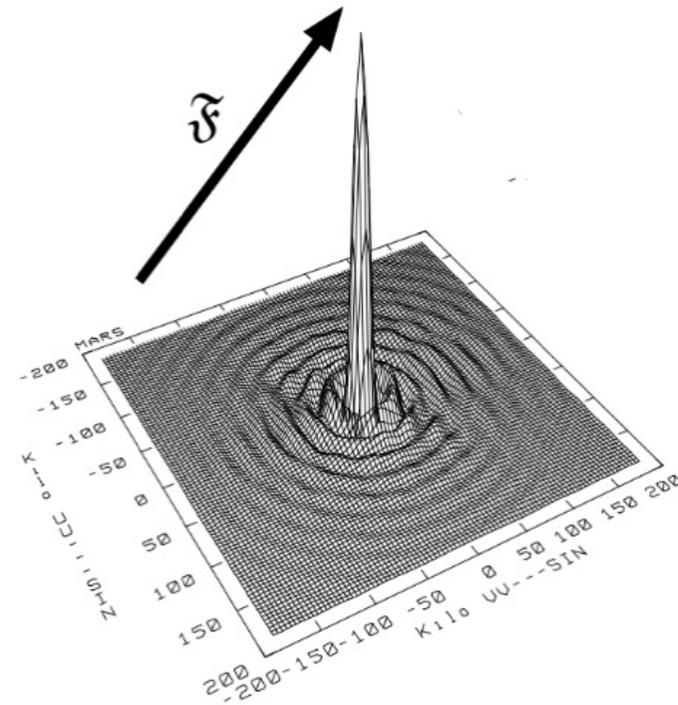
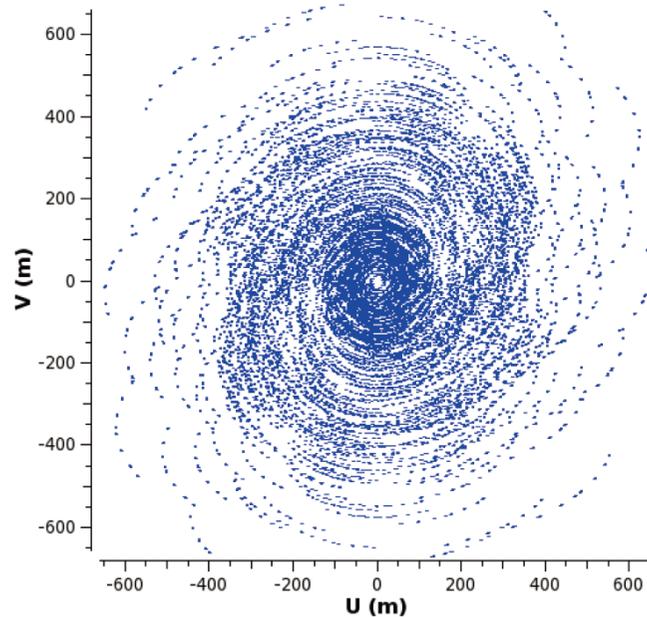


Credit: Synthesis Imaging in Radio Astronomy

## ビジビリティは(u, v)平面上の有限な点でサンプリングされる

アルマデータのuvカバレッジの例

V vs. U



右図の関数を、左図の点上でサンプリングするイメージ

## 現実的な観測

---

測定されたビジビリティ $\mathcal{V}'$ は以下のように書くことができる

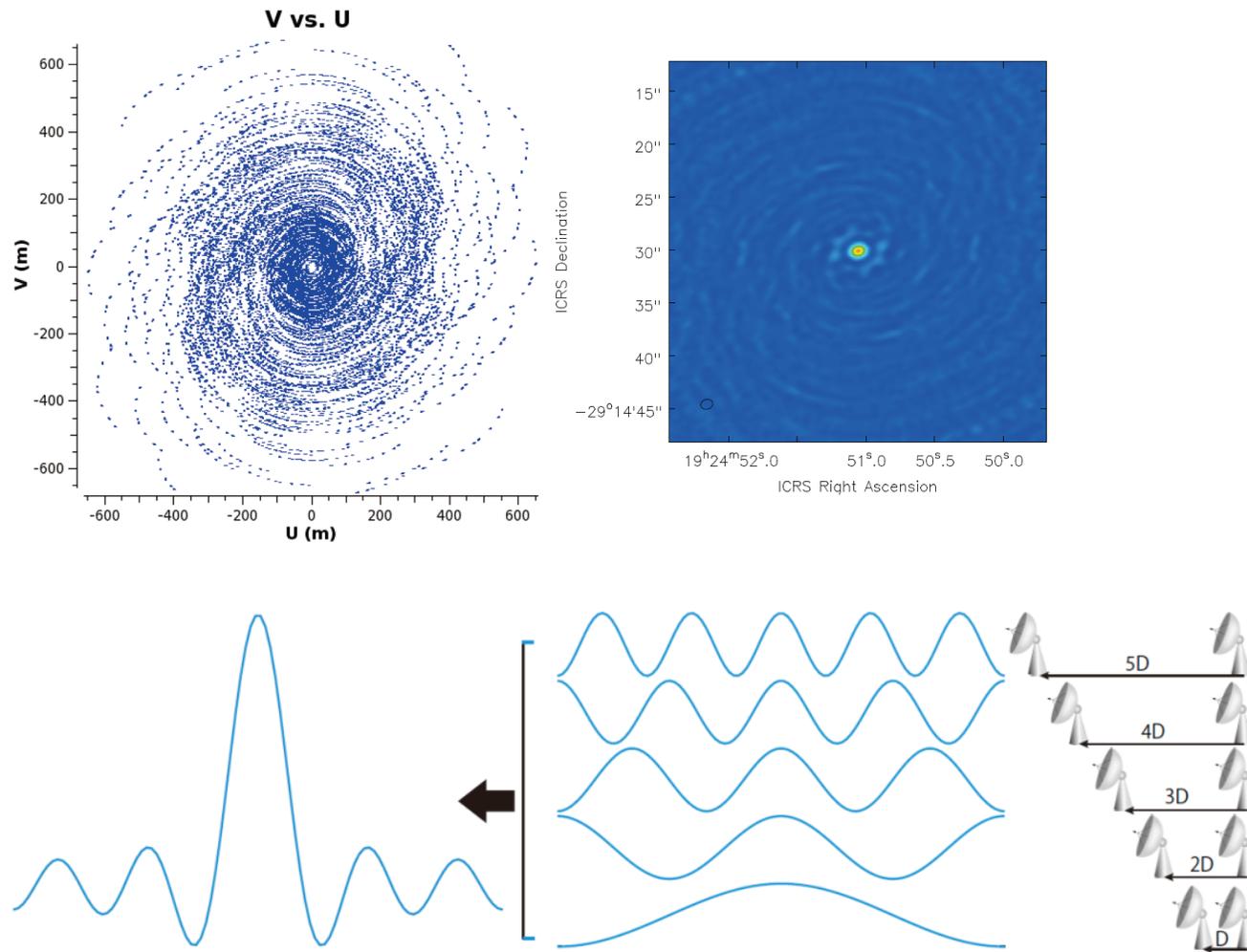
$$\mathcal{V}' = B(u, v)V(u, v)$$

$\mathcal{V}'$ のフーリエ変換を考える

$$\begin{aligned} FT^{-1}[\mathcal{V}'] &= FT^{-1}[B(u, v)V(u, v)] \\ &= FT^{-1}[B(u, v)] ** FT^{-1}[\mathcal{V}(u, v)] \\ &= FT^{-1}[B(u, v)] ** I(l, m) \\ &= b(l, m) ** I(l, m) \end{aligned}$$

合成ビーム

# uvカバレッジと合成ビーム



## 練習問題

---

### ビジビリティと輝度分布の関係

$$V(u) = \int_{-\infty}^{\infty} I(l) \exp(-2\pi iul) dl$$

に対して、輝度分布 $I(l)$ が以下の(1), (2)のとき、 $l_0$ を用いて $V(u)$ を表しなさい。

(1)  $I(l) = I_0 \delta(l - l_0)$

(2)  $I(l) = I_0 (\delta(l - l_0) + \delta(l + l_0))$

ただし、 $\delta$ はデルタ関数を表し、 $I_0$ は定数とする。

## イメージングの基礎

計算機の中では、グリidding・重み付け->フーリエ変換・deconvolution  
という流れで演算を行っているが、説明の都合上、逆順で説明する。

## Deconvolution (教科書4.6章)

---

- 干渉計で得られる画像は、真の輝度分布に合成ビームを畳み込んだもの
- 合成ビームの畳み込みを解き、真の輝度分布を再現する作業がdeconvolution
- 注意：有限のuv点でしかビジビリティを取得できていないので、デコンボリューションによって再現できる解は唯一ではない（観測方程式が正則条件を満たさない）。
  - デコンボリューションの仕方を誤ると、間違った構造が再現される。
- つまり、事前知識が必要。
  - 天体物理学的性質からの推論、経験則、過去の観測、etc.
- 参考：最近話題のスパースモデリングでは、事前知識を用いることなく、最適な解を探し出すことができるので、人為的な影響をなくすることができるという意味で優れた手法である。再現したい天体画像上の多くのピクセル値がゼロであるという仮定のもと、観測方程式（干渉計の場合 $V(u, v) \Leftrightarrow I(l, m)$ のフーリエ変換の関係式）に適切な制約項を加えることで、式を正則化し、解を探す。

## CLEAN (教科書4.7章)

---

- Hogbom (1974)によって考案されたデコンボリューションアルゴリズム。
- 天体構造が点源の集合で表現できると仮定

$$I \simeq I^C(m) = \sum_{q=1}^m I_q \delta(l - l_q, m - m_q)$$

- Iterativeに点源の位置と強度を決めていき、最終的にCLEANビームと呼ばれるビームを点源の集合に畳み込むことで、輝度分布を再現する。
- CLEANビームは、合成ビームをガウシアンで近似したものを使うのが一般的 (後述)。

1. Dirty イメージ上で輝度ピークを同定する。
2. 同定された場所で、CLEAN コンポーネントと呼ばれるデルタ関数を立てる。CLEAN コンポーネントに合成ビームを畳み込んだ関数を使って、Dirty イメージから引き算を行う。畳み込む合成ビームは、適当なスケールリングファクター (loop gain あるいは単に gain と呼ぶ) で調整する。
3. こうして得られた CLEAN コンポーネントの位置と強度を保存する。
4. ステップ2で引き算を行った後の残差イメージ (residual image) 中で輝度ピークを同定し、再び CLEAN コンポーネントを立て、合成ビームを畳み込んだ後、引き算を行う。
5. 上記ステップを、目立った構造が Dirty イメージ上からなくなるまで (あるいは目的に応じた画像閾値レベルに達するまで) 繰り返す。
6. 得られた CLEAN コンポーネントの集合に、CLEAN ビームを畳み込み、最終的な残差イメージ<sup>3</sup>を足し合わせて、CLEAN イメージを得る。

## CLEANを漫画で説明



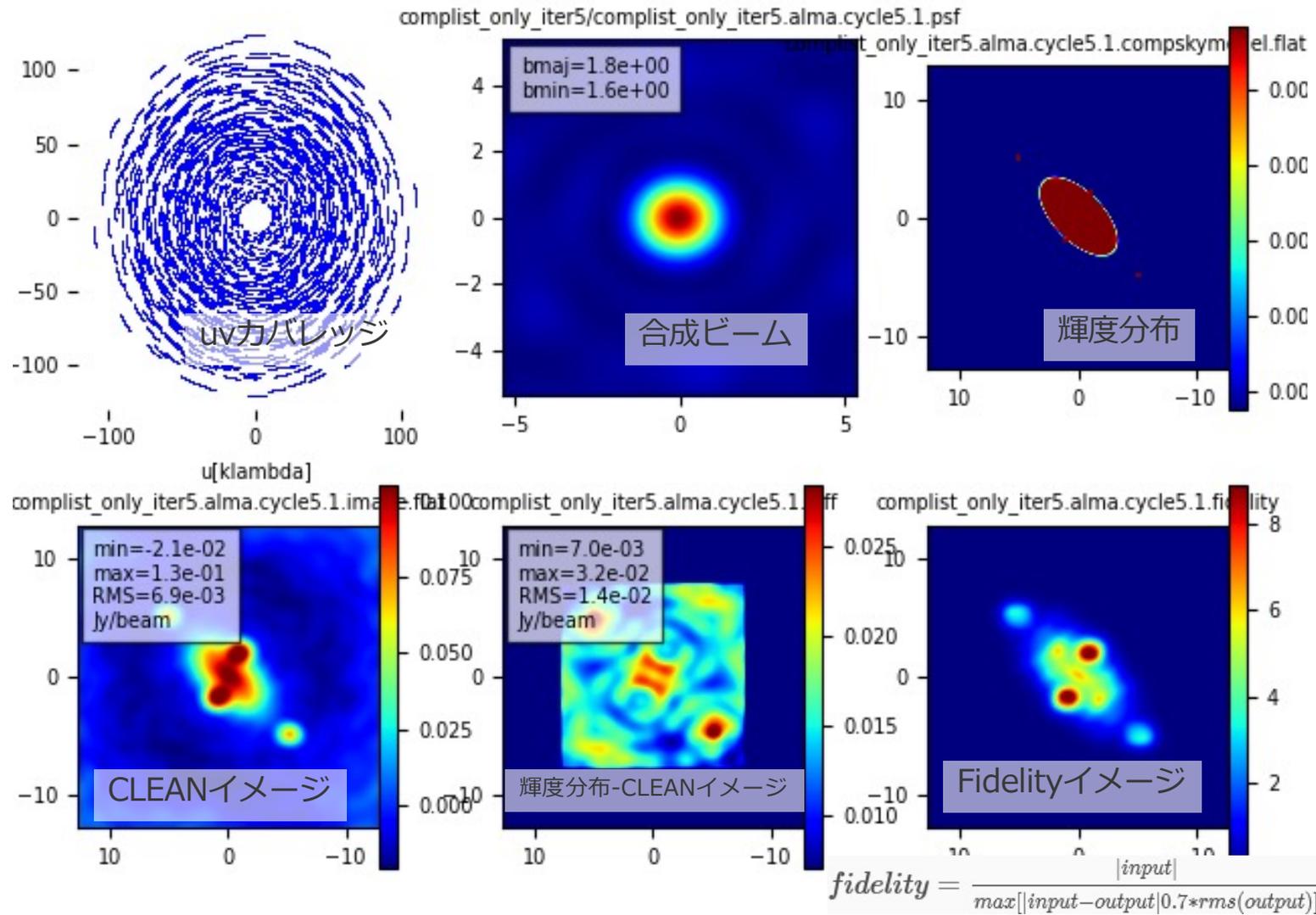
$I_{obs}$ : 観測された輝度分布

$b(l)$ : 合成ビーム

- ① 最も明るい場所を探し、 $\delta$ 関数（CLEAN成分）を置く。
- ② CLEAN成分に合成ビームを畳み込み、 $I_{obs}$ から差し引く。次に明るい場所に別のCLEAN成分を置く。
- ③ ②で立てたCLEAN成分に合成ビームを畳み込んだものを使って、 $I_1$ から差し引く。次に明るい場所に別のCLEAN成分を置く。
- ④ 残差マップ上に顕著な成分が見えなくなるまで、上記操作を繰り返す。
- ⑤ CLEAN成分の集合に、CLEANビームを畳み込み、最終残差マップを足したものを、最終マップ（CLEANマップ）とする。ここで、CLEANビームとは、合成ビームに対してガウシアンフィットを行って得たビームである。

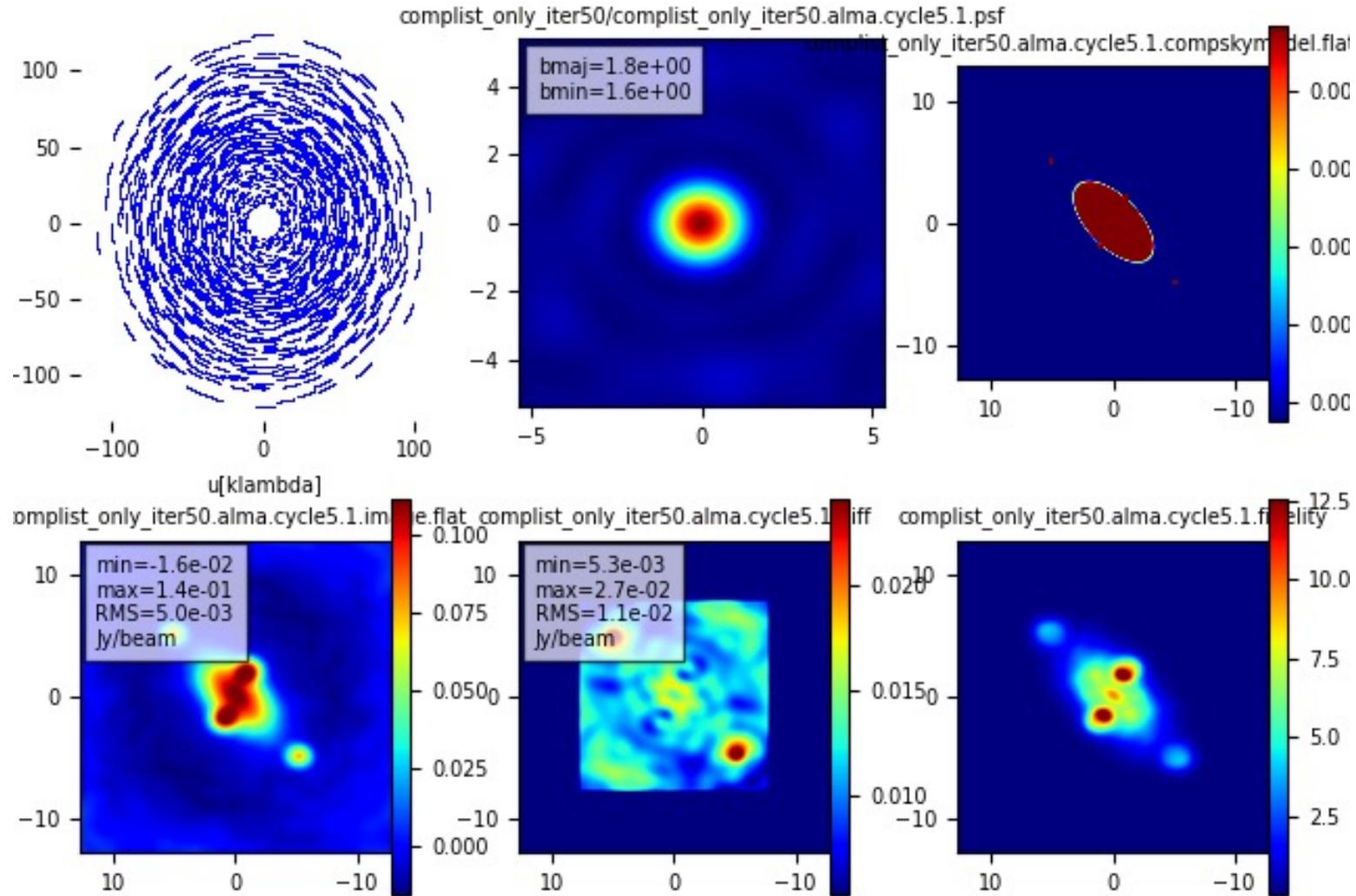
# CLEANシミュレーション

0.5%のゲインで5回イタレーション



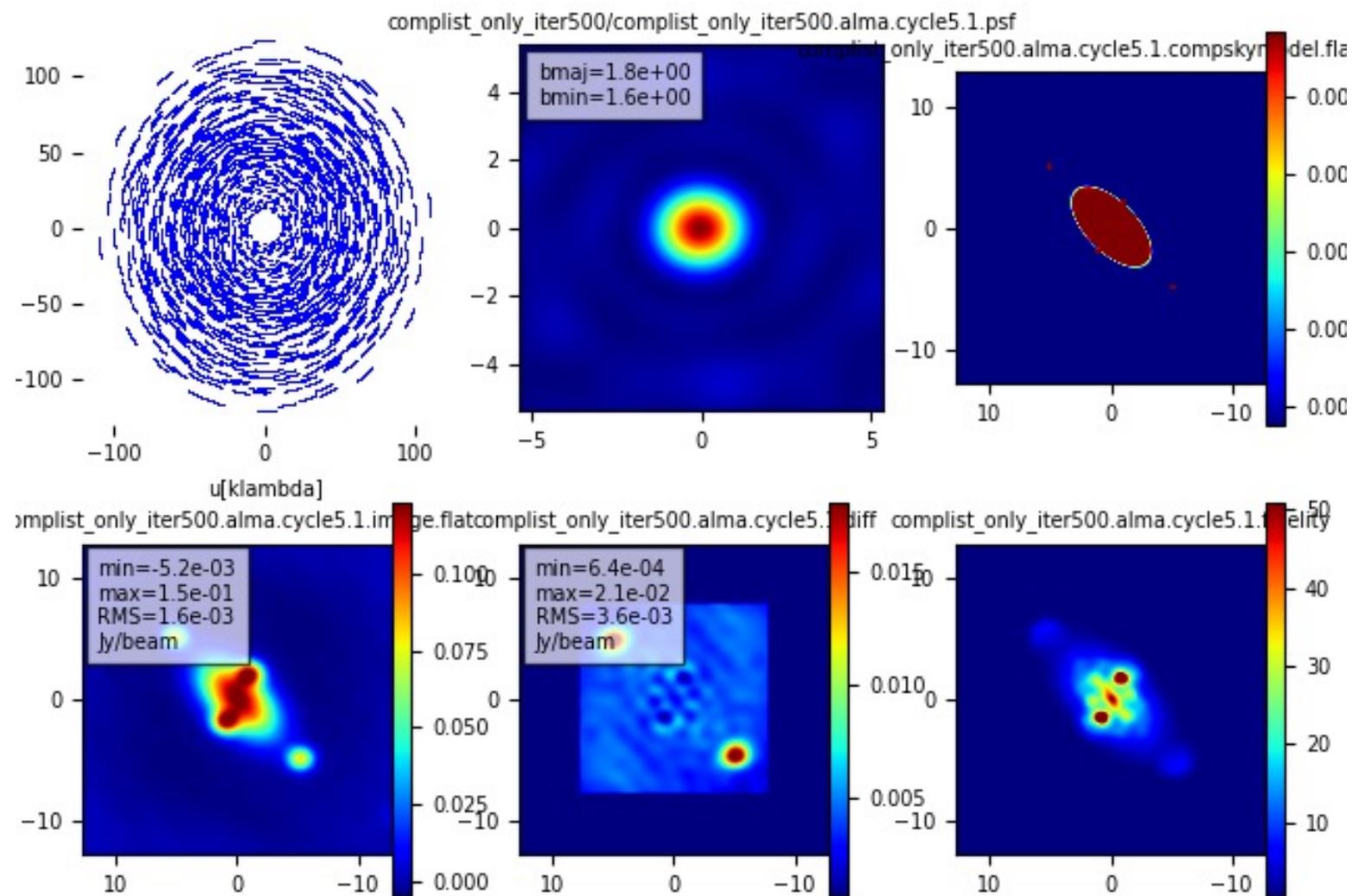
# CLEANシミュレーション

0.5%のゲインで50回イタレーション



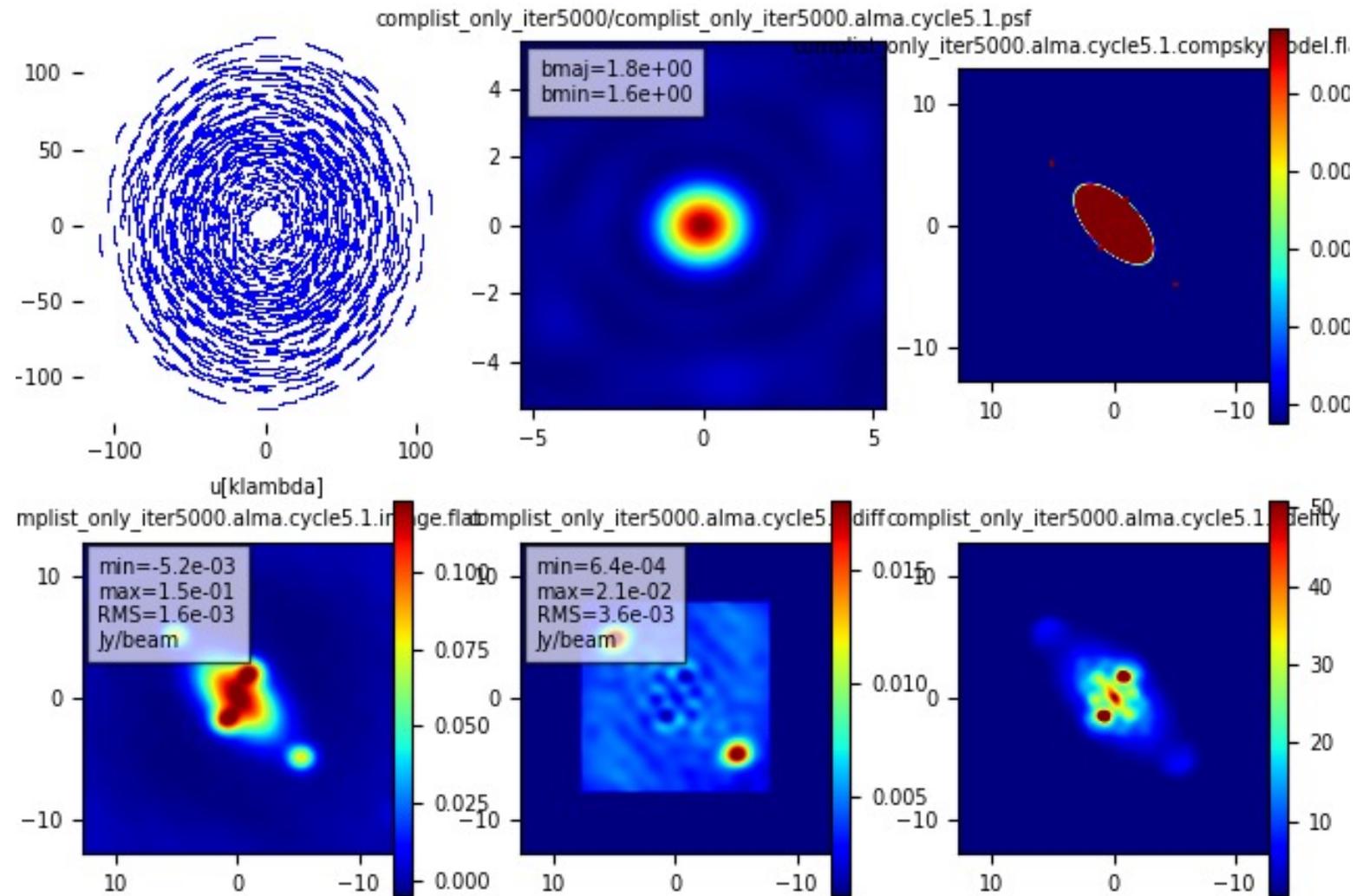
# CLEANシミュレーション

0.5%のゲインで500回イタレーション



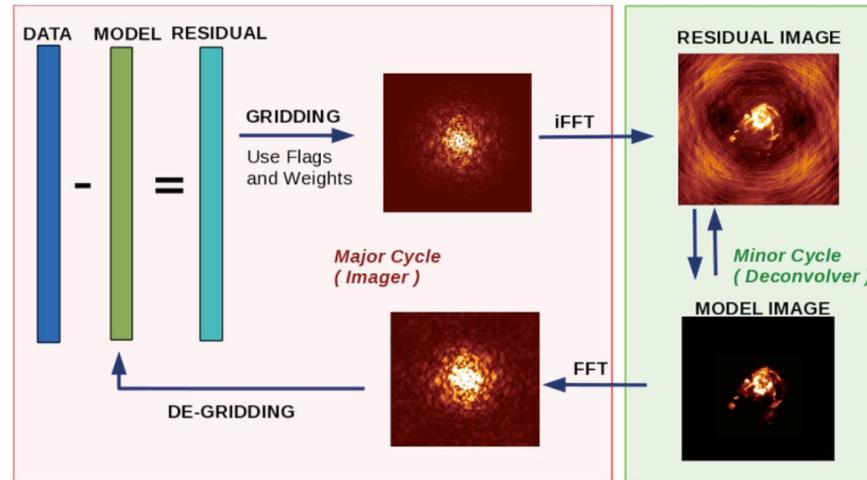
# CLEANシミュレーション

0.5%のゲインで5000回イタレーション



## Clark CLEAN (教科書4.7章)

- Clark (1980)によって考案された方法で、FFTを使ったCLEANアルゴリズム。



- メジャーサイクルとマイナーサイクルの2つの過程からなり、メジャーサイクルではモデルイメージのフーリエ変換を行って、ビジビリティドメインでデータとモデルの差分を取る。マイナーサイクルではイメージドメインでモデルをbuild-upする (Hogbom CLEANと等価)。Hogbom CLEANは常にイメージ上での操作に対し、Clark CLEANは適切な間隔で、ビジビリティからresidual imageを再生成する。
- Residual visibilityからresidual imageを生成する際、グリidding、重み付け、その他高次の効果を含めた再計算が行われるが、マイナーサイクルではこの点を無視している。

## Clark CLEAN (教科書4.7章)

---

- メジャーサイクルを頻繁に入れたほうが、数学的により正確な解が導かれるが、計算コストがかかる。
- メジャーサイクルを入れるタイミングについての詳細は、CASA Docsを参照のこと。「CLEAN not converged」というワーニングメッセージが出ることがあるが、これはメジャーサイクルの頻度を上げることで解決されることが多い。

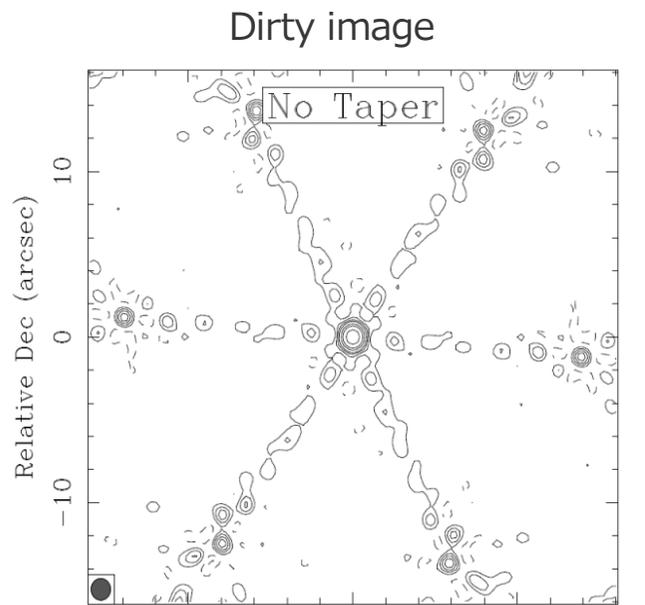
## CLEANのやめ時

---

- CLEANを進めると、Residual imageにだんだん顕著な成分がなくなり、ランダムなノイズ成分だけが見えるようになってくる。
- どこでCLEANをやめるかは、あまり統一した見解がないように思える。
- 理論的には観測感度で決まる熱雑音レベルまでCLEANを進めたいが、実際には系統誤差の影響により、必ずしも熱雑音まで達しない。**conservativeに熱雑音の3シグマあるいはそれ以上でCLEANを止めるのが安全だ。**  
tcleanのthresholdパラメーターで、閾値を与えることができる。
- 注意：非常に明るい天体の場合、理論的熱雑音レベルからははるかに高いレベルの残差成分がresidual image上に残る。これは、主にphase calibration errorによって、しっかりと結像しなかった輝度成分がイメージ上にばらまかれてしまうことが原因。ALMAの場合、イメージダイナミックレンジ ( $DR = I_{\text{peak}}/I_{\text{rms}}$ ) は、通常のキャリブレーションでは100程度（高周波バンドではもっと低い）、self-calibrationを用いることで1000程度になる。

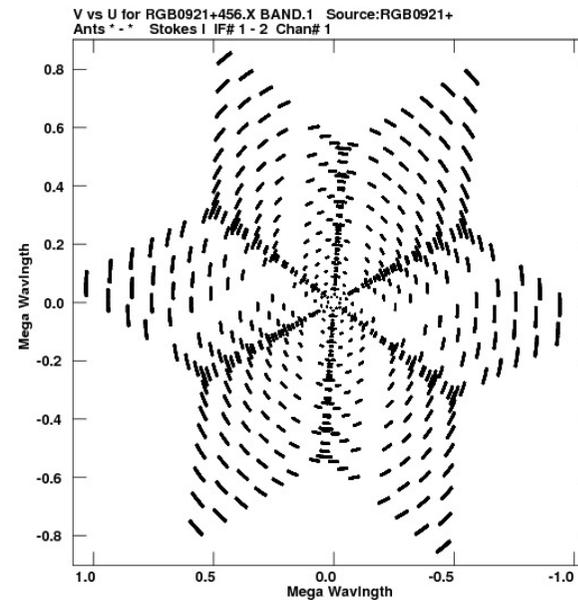
## CLEANマスク（ボックス）の活用

- Dirtyイメージ上のどの成分が真の輝度で、どの成分がサイドローブかの判定が必要
  - サイドローブ成分を積極的にCLEANしてしまうと、最終的に間違った構造を作り出してしまう。特にself-calibrationを併用するときには深刻。
- 以下の画像を例に、みなさんだったら、CLEANマスクをどのように置くか考えてみましょう。



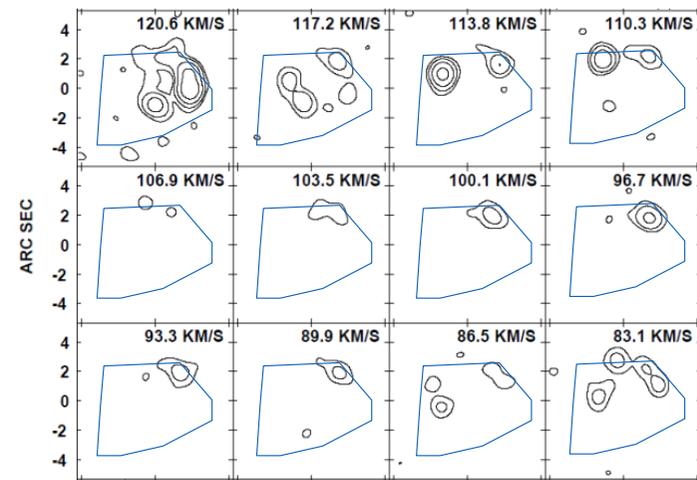
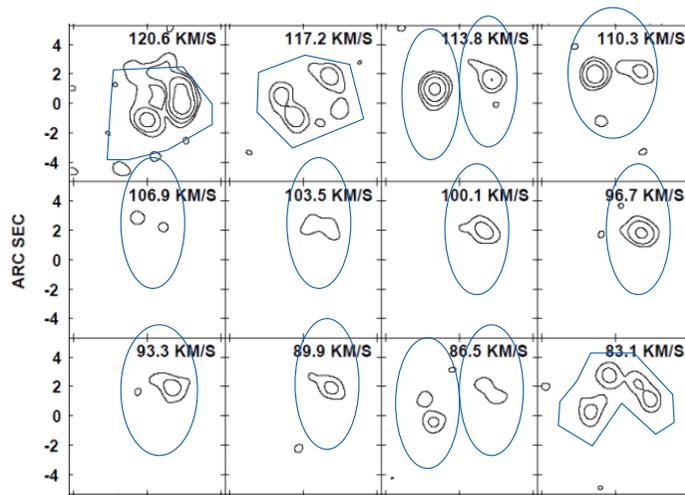
Credit: Synthesis Imaging in Radio Astronomy

uvカバレッジ（おおよそこんな感じ）



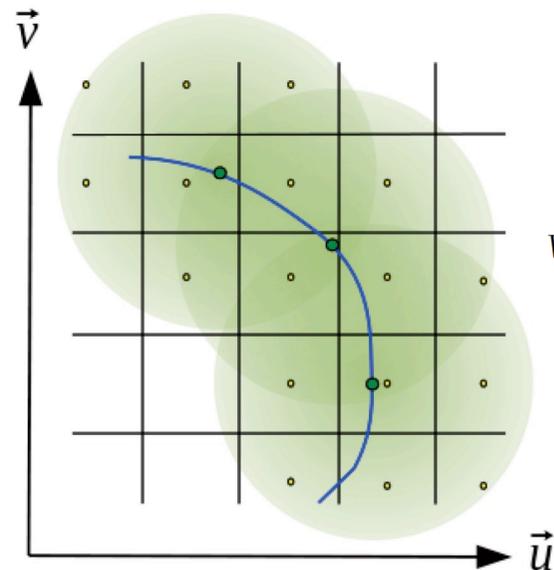
# Spectral Line Imaging

- 連続波観測と違って、スペクトル線観測の場合、天体構造が周波数方向に変化するので、CLEANマスクの設定に悩むことがある。
- チャンネル毎にマスクを設定してもよいが、骨が折れるので、全てのチャンネルで共通な、大きめのマスクを設定するのがよくやる手。



## グリiddingと重み付け（教科書4.4章）

- ビジビリティから輝度分布へとフーリエ変換する際、FFTを使った計算を行うのが一般的である。このため、測定されたビジビリティを、適切な間隔でグリiddingしたuv面上の格子に代表させる。この操作は、測定されたビジビリティをuv面上で適当な畳み込みを行った後、格子点でリサンプリングすることで実現する。
- ただし、uv面上に大きくキャップがある場合は、0 fillingを行う。

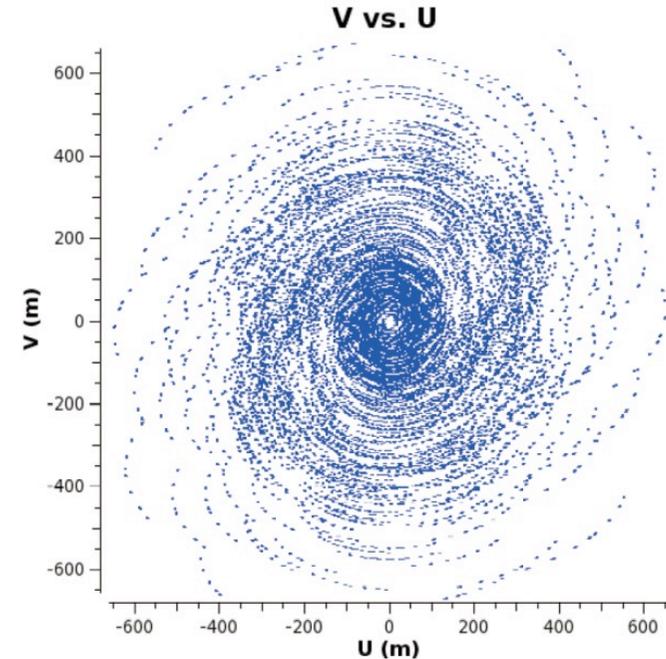


$$V' = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(u - j\Delta u, v - k\Delta v) C(u, v) ** [S(u, v) V(u, v)]$$

格子間隔よりも少し大きな広がりを持つ関数  
(CASA tcleanではprolate-spheroidal function を採用)

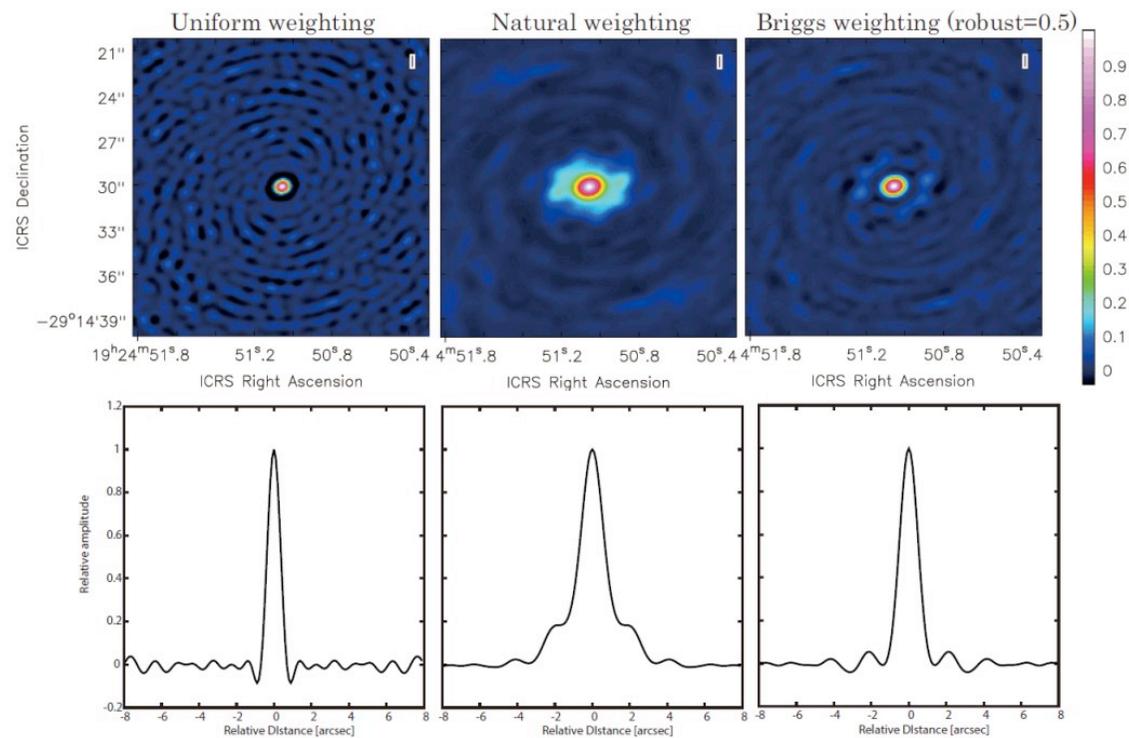
## グリiddingと重み付け（教科書4.4章）

- uvカバレッジは一様ではない
  - 各基線が取得するビジビリティの(u,v)面上での軌跡は、短い基線（内側の(u,v)点）ほどゆっくり時間変化し、長い基線ほど速く時間変化する。
  - (u,v) 原点に近いほど、ビジビリティ点が密になる傾向にあるので、各格子点に代表されるデータ点数は一定ではない。
  - 結果的に、各格子点にかける重みによって、得られる合成ビームの形が変わる。
- Natural weighting
  - 格子要素内に含まれる全てのデータ点に対して、同じ重みをかけてフーリエ変換を行う。
- Uniform weighting
  - 格子要素内のビジビリティに対して $1/N_k$  ( $N_k$ はk番目の格子要素のデータ点数) に比例した重みをかけ、結果的に(u,v)面全体にわたって重みの総和が一定になる。



## グリiddingと重み付け（教科書4.4章）

- Natural weightingは感度最大、uniform weightingは空間分解能が高い（サイドローブは高くなる傾向）。
- Briggs weightingは、ロバストパラメータ（R）というものを導入して、重み付けをより一般化した方法。R=0.5で合成ビームの形状と感度の両方を最適化することができる。



## テーパーグリiddingと重み付け（教科書4.5章）

---

- 基線長に応じたtaper functionを重み付けに使う方法。
- 天体構造の低空間周波数成分（広がった構造）のみに着目したいときに、高空間周波数成分の重みを相対的に落とすようにGaussian taperをかける。

$$w^t \propto \exp -(u^2 + v^2)/2\sigma^2$$

## 主ビーム補正 (Primary beam correction)

---

$$V(u, v) = \iint A(l, m) I(l, m) e^{-2\pi i(ul+vm)} dl dm$$

- 上記式からもわかるように、ビジビリティを逆フーリエ変換することによって得られる輝度分布には、アンテナの主ビーム応答の影響が残っている。
- 通常、主ビーム応答は、おおよそガウシアンで表現でき、視野中心から外れるほど、感度が低下する。そのため、主ビーム補正を行わないと、視野中心から外れた放射のフラックス値を誤ってしまう。
- 特にモザイク観測で重要。
- tcleanのpbcor=Trueで、主ビーム補正を実行する。もしくは、pbcor=Falseで作成したイメージに対して、タスクimpbcorを実行する。

## イメージングの知識 発展的内容

## Multiscale CLEAN (教科書4.7.3章)

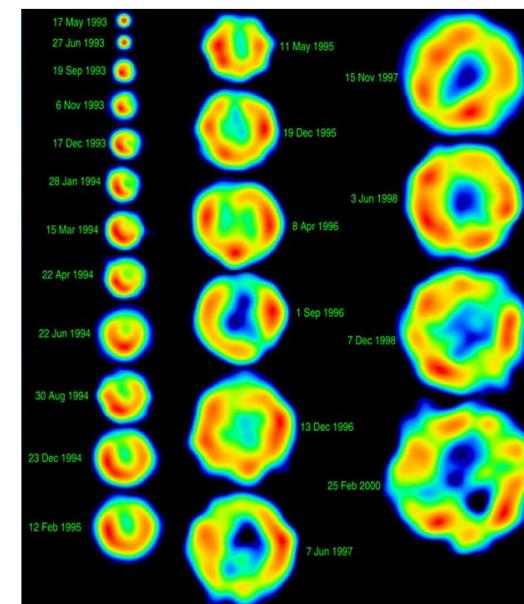
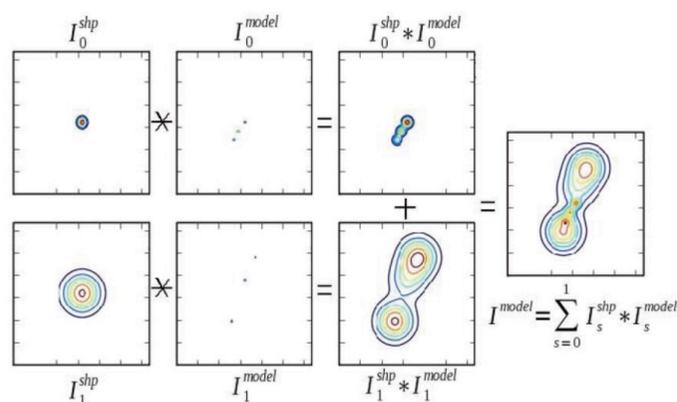
- 天体は「点源の集合」では近似が難しいことも。
- **Multiscale CLEAN: CLEANコンポーネントの太さを定義するパラメーターを導入することで、この問題を軽減。(deconvolver='multiscale')**

$$I^M = \sum I_q M(l - l_q, m - m_q, \alpha_q)$$

$$M(r, \alpha) = \Psi(r) \left( 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right)$$

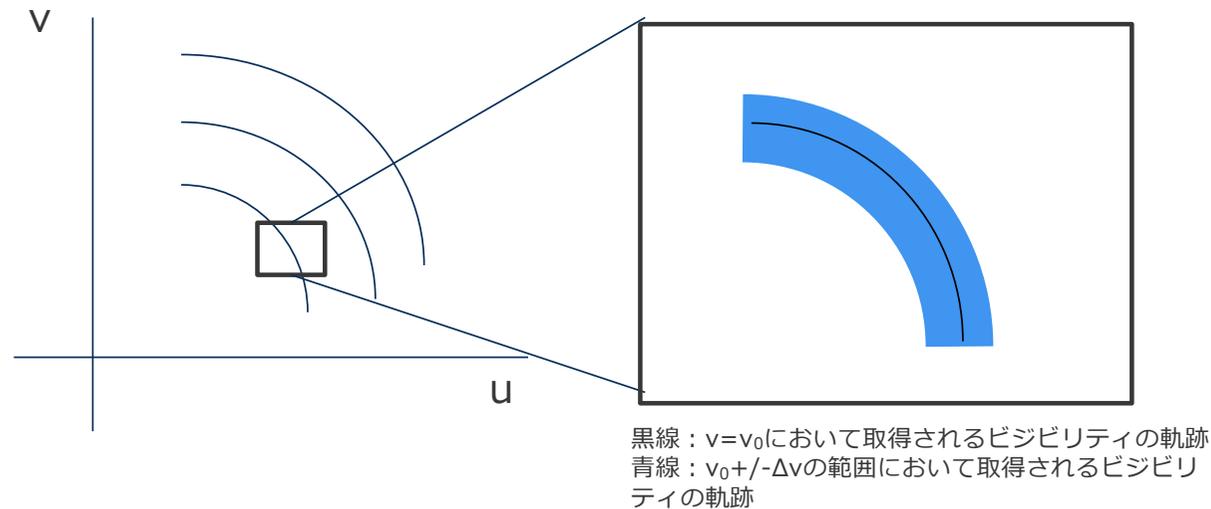
$\Psi$ はprolate spheroidal wave function (ほぼガウシアン)。

- **$\alpha=0$ の時はデルタ関数と一致 (つまり通常のCLEAN)。**



のっぺり広がった例 (SN1993J)

## Multifrequency Synthesis (MFS)とMultiterm MFS (教科書4.7.4章)



- ビジビリティは空間周波数の関数であり、空間周波数は観測周波数に依存する。
- ALMAの場合、一つのスペクトルウィンドウの最大有効帯域は1.875 GHzある。この帯域を分光してデータを得るわけだが、分光点数分の独立なビジビリティが存在するので、本来はそれらを独立なビジビリティとして取り扱う必要がある。

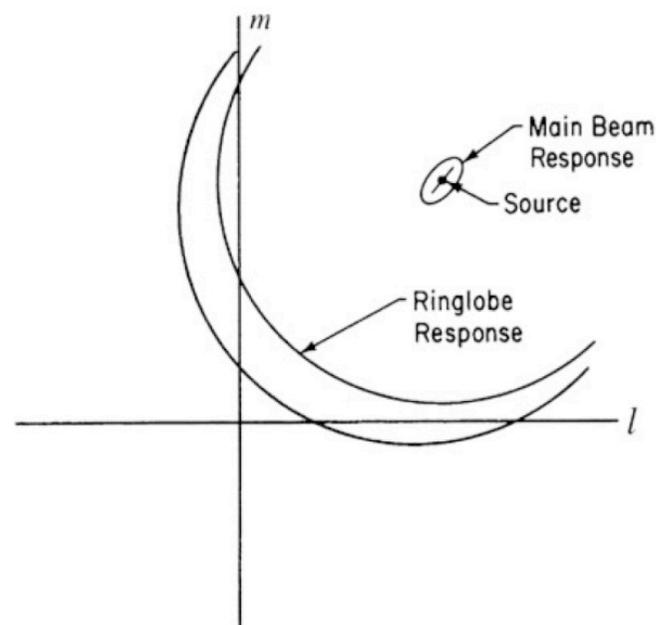
## Multifrequency Synthesis (MFS)とMultiterm MFS (教科書4.7.4章)

- 連続波観測の場合、感度をかせぐために、帯域方向に積分することがあるが、これは、独立なビジビリティを一つのノミナルなビジビリティに代表させるという操作をしていることに相当する。これはsmearingという効果を生み、再現される天体の輝度分布の強度・構造をゆがめてしまう（詳しくは教科書の4.7.4を参照）。ゆがみの影響は、視野中心から離れるほど深刻になる。

$$(u, v) = \left( \frac{u_\nu \nu_0}{\nu}, \frac{v_\nu \nu_0}{\nu} \right)$$

$$V_\nu \left( \frac{u_\nu \nu_0}{\nu}, \frac{v_\nu \nu_0}{\nu} \right) \Rightarrow \left( \frac{\nu}{\nu_0} \right)^2 I \left( \frac{l\nu}{\nu_0}, \frac{m\nu}{\nu_0} \right)$$

$\nu_0$ : 中心周波数、 $\nu$ : 帯域内の任意の周波数、  
 $(u_\nu, v_\nu)$ : 周波数 $\nu$ における本来の空間周波数



Thompson, Moran, & Swenson

## Multifrequency Synthesis (MFS)とMultiterm MFS (教科書4.7.4章)

---

- MFSは、周波数毎のビジビリティを独立に扱う。(CASAではspecmode='mfs')
  - メリット : smearing free、uv点が増える。
  - デメリット : 計算コストが上がる
- MFSを採用するにあたっては、天体の放射スペクトルを与えなければならない。CASAでは、以下のようなテイラー展開によってCLEANコンポーネントのスペクトルをモデル化する。(CASAではdeconvolver='mtmfs')

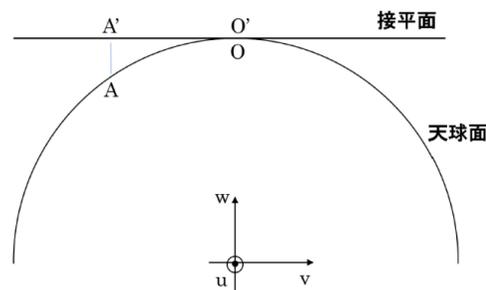
$$I_{\nu}^m = \sum_{t=0}^{N_t-1} \left( \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \right)^t I_t$$

## モザイク観測（教科書4.8章）

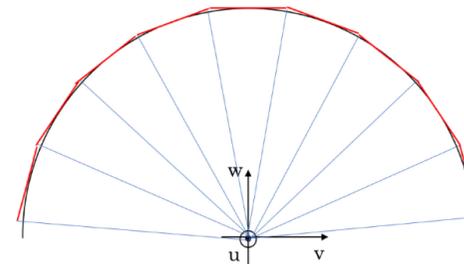
- アンテナの主ビームで制限される視野よりも大きな範囲をイメージングする際に用いる手法。
- 望遠鏡のポインティングをずらしながら相互相関を取り、全てのポインティングをつなげて、実行的に広い視野を得る。

$$V(u, v) = \sum_p^{N_p} \iint_{-\infty}^{\infty} A(l - l_p, m - m_p) I(l, m) \exp(-2\pi i(ul + vm)) dl dm$$

- イメージングする範囲が広いため、non-coplaner arrayの影響が無視できない（アンテナが同一平面にあるとみなせない）。
- 軽減策として、w-projectionやfacetingが用いられる（詳しくは教科書参照）。



W-projection



Faceting

## モザイク観測：W-projection（教科書4.8.1章）

### Visibility $\Leftrightarrow$ Intensity distributionの関係式（より厳密な式）

$$V(u, v, w) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(l, m) \frac{I(l, m)}{\sqrt{1 - l^2 - m^2}} \exp(-2\pi i(ul + vm + w(\sqrt{1 - l^2 - m^2} - 1))) dl dm$$

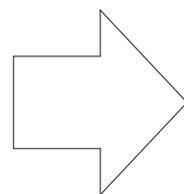
（位相中心から十分狭い範囲（ $l^2 + m^2 \ll 1$ ）では前述の $V \Leftrightarrow I$ の関係式が成立）

### 以下のように書き直す

$$V(u, v, w) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(l, m) \frac{I(l, m)}{\sqrt{1 - l^2 - m^2}} G(l, m, w) \exp(-2\pi i(ul + vm)) dl dm$$

$$G(l, m, w) = \exp(-2\pi i(w(\sqrt{1 - l^2 - m^2} - 1)))$$

$G(l, m, w)$ のフーリエ変換

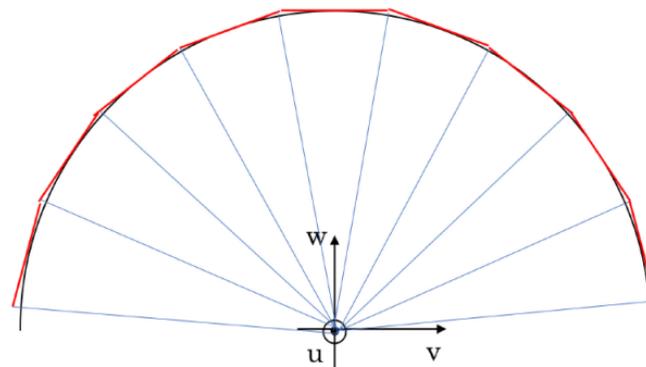

$$V(u, v, w) = \tilde{G}(u, v, w) * V(u, v, w = 0)$$

2次元フーリエ変換（ $V(u, v, w = 0)$ ）を行った後、 $\tilde{G}(u, v, w = 0)$ を畳み込む演算を行うことで、w-termを無視できない状況のイメージングを可能にしている。

## モザイク観測：Faceting（教科書4.8.2章）

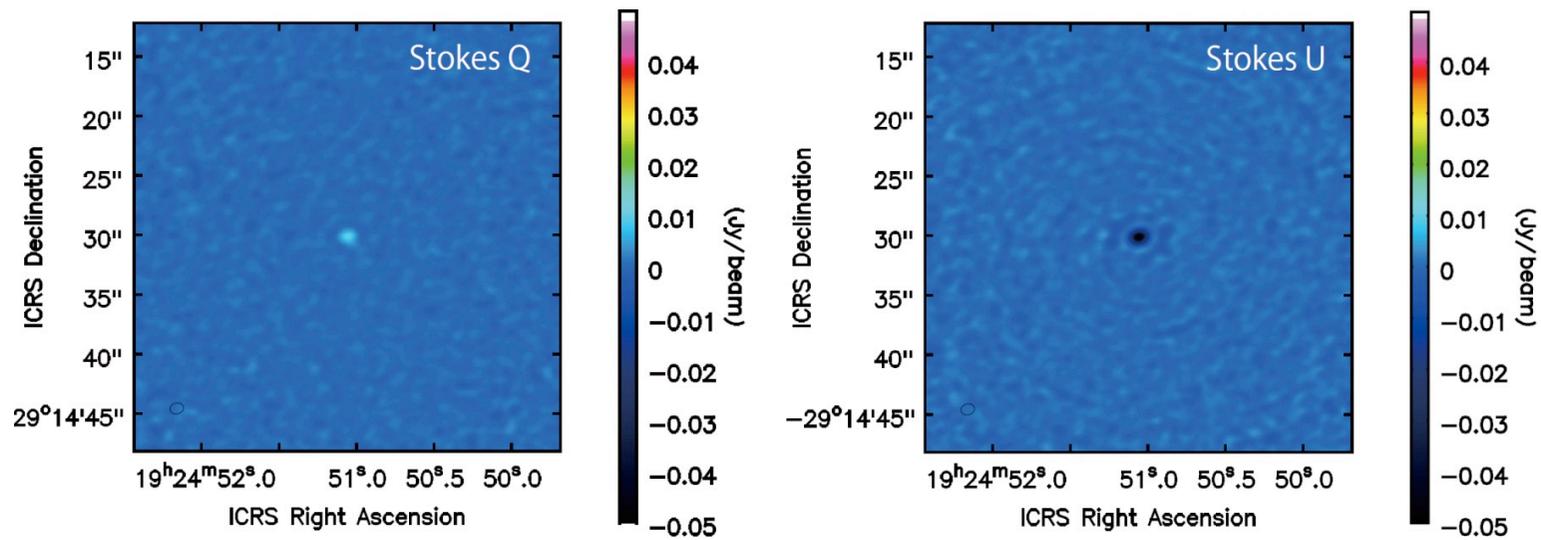
$$\sum_k^N V_k(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(l, m) I_k(l - l_k, m - m_k) \exp(-2\pi i(u(l - l_k) + v(m - m_k))) dl dm$$

- 天球面のカーブを十分無視できるくらいの小さなファセットに分割し、イメージングを行う。
- 厳密には、W-projectionもfacetingも、 $A(l, m)$ の高次の影響を考慮する必要がある（A-projection）。A-projectionは2020年1月現在、開発途上にあり、ALMAデータに対しては適用できていない。

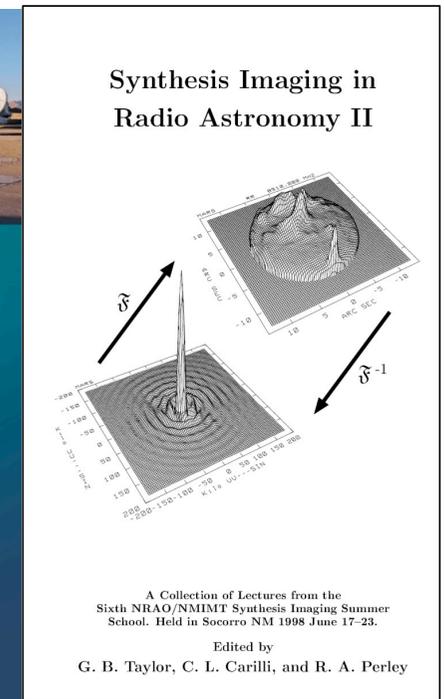
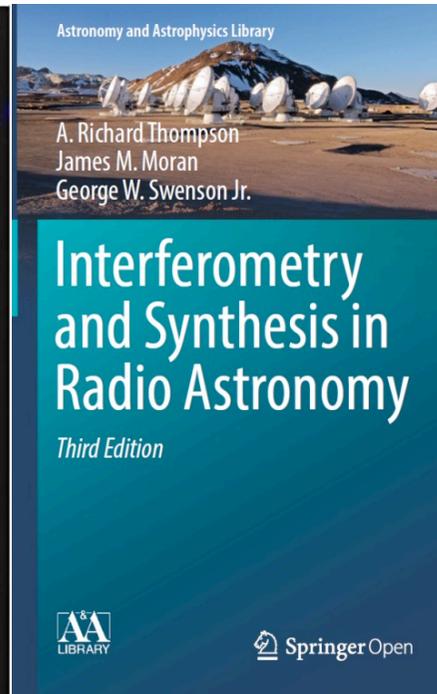
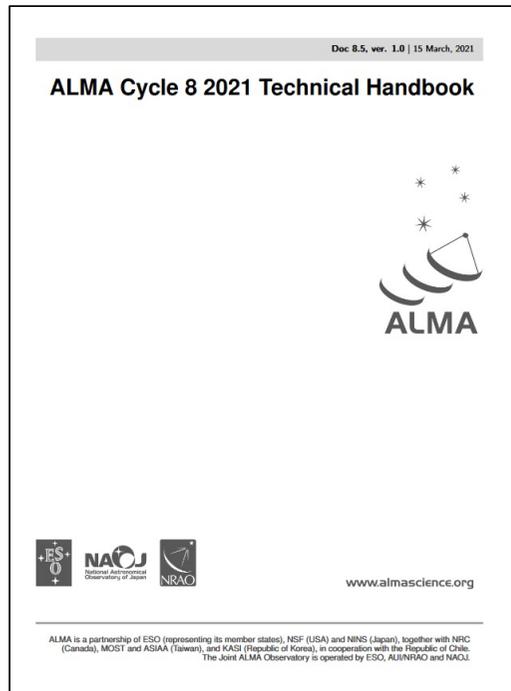


## 偏波イメージング (教科書4.9章)

- Stokes I, Q, U, Vの4つのストークスパラメータのイメージを得る。
- マイナスのフラックスを持つので、イメージ上でネガティブな成分に対してもCLEANを行う必要がある。



# References



Backup slides