

# 恒星非動径振動の数理

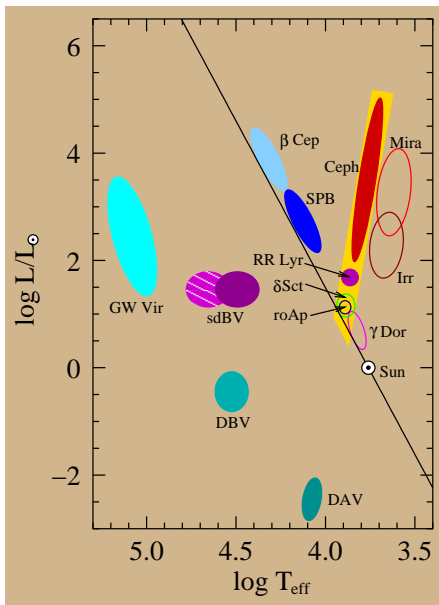
## —固有値問題としての性質—

高田 将郎

東京大学大学院理学系研究科天文学専攻

2008年3月13日(木)

# 脈動変光星の観測



## さまざまな脈動変光星

- 単周期、球対称のもの  
多くが不安定性帯に分布  
周期光度関係  $\Rightarrow$  距離指標
- 多周期、非動径のもの  
日震学、星震学のターゲット  
20世紀半ば以降に多数発見

## 最近の進展 ~ 高精度観測

- 人工衛星 (MOST, CoRoT)
- 地上視線速度測定  
太陽型振動の検出

# 恒星振動の理論 (1)

- 歴史
  - 動径（球対称）振動  
19世紀終わり頃から発展、初期の対象はセファイド
  - 非動径（非球対称）振動  
1950年代から本格化
- 脈動変光現象は恒星の固有振動
- 基本的な部分については「一応」の理解が得られているが、いまだに不十分な点もある
- 近年の高精度観測を解釈するためには、より深い理論的な理解が必要

## 恒星振動の理論 (2)

理論的取扱いの段階 (平衡状態は球対称)

理想的 (単純、やさしい)	⇒	現実的 (複雑、難しい)
動径 (球対称)		非動径 (非球対称)
線形 (微小振幅)		非線形 (有限振幅)
断熱		非断熱 (振動の成長、減衰)
		磁場、回転の効果

# 恒星振動の理論 (3)

## 非動径・線形・断熱振動の現在の解析手法

- 角度依存性は球面調和関数で記述される
- 動径部分は、4階の線形常微分方程式

流体力学 (連続の式, 運動方程式), ニュートン重力, 熱力学 (断熱の式)

- 定性的議論
  - 重力場の変動を無視 (Cowling 1941)  
⇒ 近似的な2階の方程式
  - 漸近解析
- 定量的議論 ⇒ 数値計算



$\ell = 1, m = 0$



$\ell = 2, m = 1$



$\ell = 5, m = 2$

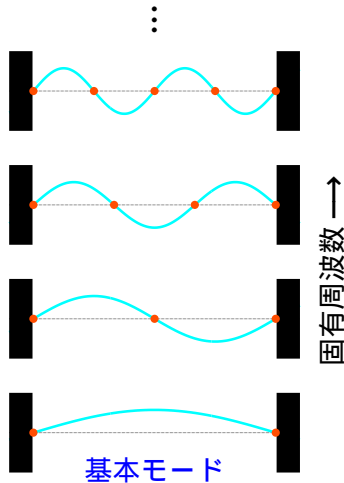
十分に解析されていない問題

重力場の変動を考慮した場合の定性的な議論

# よく理解されている固有値問題の例

両端を固定された1次元の弦の振動

- 最低周波数のモード (基本モード) がある
- いくらでも高い周波数のモードがある
- 固有周波数が高くなるにつれて節の数が1つずつ増える
- 隣り合うモードの節の位置関係  
低い方のモードの固有関数の隣り合う節の間に、高い方のモードの固有関数の節が1つある



## 固有値の分布、および固有値と固有関数の性質の関係

- 固有値の変化にともない固有関数の節の数や性質はどう変化するか？
- 解析的に解けなくても、解の性質を理解できるようになることが目標
- あらゆる星の構造の場合にあてはまる性質を調べる

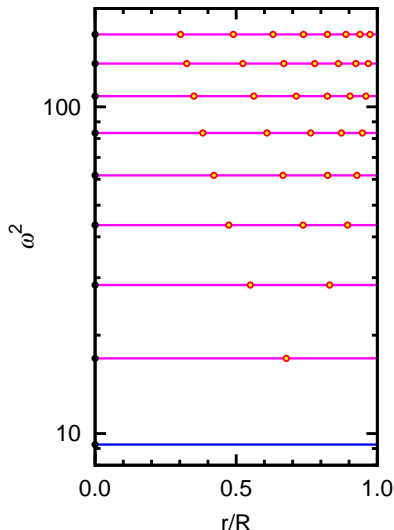
# 動径（球対称）振動

指数 3 のポリトロープの場合

動径・線形・断熱振動

- 2 階の方程式
- ⇒ (特異) Sturm–Liouville 型
- 角振動数の 2 乗 ( $\omega^2$ ) が固有値
- 弦の場合と共通の性質

動径振動は「よくわかっている」



●, ○: 固有関数 (変位  $\delta r$ ) の節の位置



- 星: 圧力勾配と重力のつりあっている系
- 固有振動モードを構成する波  
(局所解析からわかる結果)
  - 音波  
圧力を復元力とする  
周波数に下限がある
  - (内部) 重力波  
浮力を復元力とする  
周波数に上限がある  
非動径振動にのみ寄与
  - 表面重力波  
浮力を復元力とする  
表面近くにのみ振幅を持つ, 節を持たない, 非圧縮  
(cf. 水面の波)

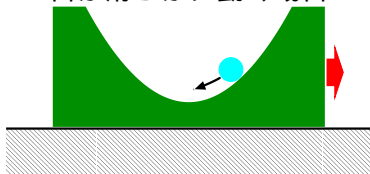
# Cowling 近似

## Cowling (1941)

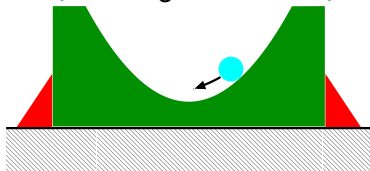
- 振動にともなう重力場の変動を無視する
- 複雑なパターン（短波長）の振動や密度の低い外層ではよい近似
- モード分類（pモード、gモード、fモード）を議論する場合の前提
- ただし、問題も見つかっている（後述）

台上の質点運動によるたとえ

台が滑らかに動く場合



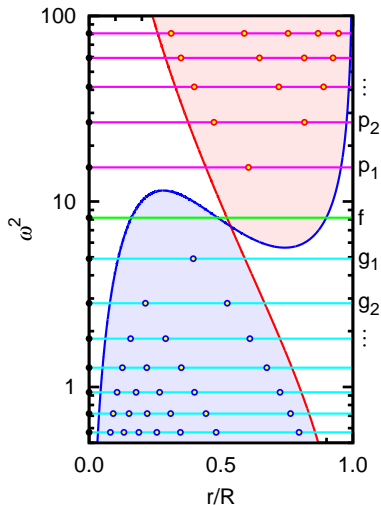
台を固定した場合  
(Cowling 近似に相当)



# Cowling 近似下での非動径振動

- 2 階の方程式  
( Sturm–Liouville 型ではない )
- 固有値に上限はなく、また下方は 0 に集積
- 高周波数領域: p モード  
低周波数領域: g モード  
(  $\ell > 1$  では) 中間に f モード
- (中心集中度の高くない構造では、)  
 $n$  番目の p, g モードの固有関数  
(変位の動径成分  $\xi_r$ ) は  $n$  個の節を持つ  
f モードの固有関数に節はない  
(ただし、中心は除く)

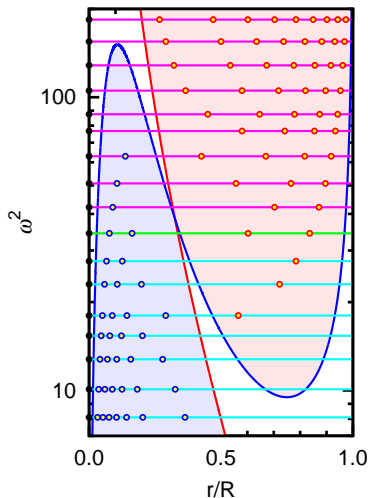
指数 3 のポリトロープ,  $\ell = 2$



# 中心集中度の高い星の場合

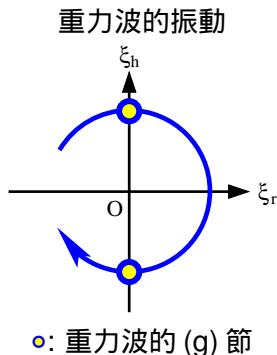
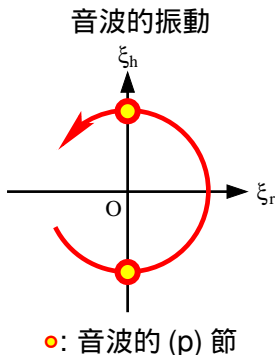
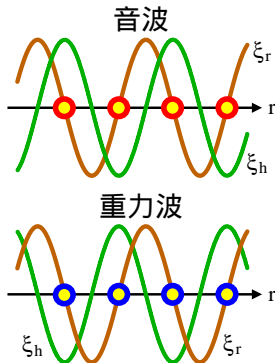
- 進化した (中心集中度の高い) 星では, 中心部で重力が強まる
- ⇒ fモード, 低いp, gモードは, 中心では重力波のように, 外層では音波のように振る舞う (混合モード)
- ⇒ 「pモード  $\leftrightarrow$  音波」  
「gモード  $\leftrightarrow$  重力波」という単純な対応関係が崩れる
- どうやって節の数からモードを判定する?

指数4のポリトロープ,  $\ell = 2$



# Eckart–Scuflaire–Osaki (ESO) 分類 (1)

- Cowling 近似下の恒星非動径振動のモード分類法 (Eckart 1960; Scuflaire 1974; Osaki 1975)
- 音波、重力波の  $\xi_r$ - $\xi_h$  平面 (位相図) 上の振舞いの違いに着目 ( $\xi_r$ : 変位の動径成分;  $\xi_h$ : 変位の水平成分)



## Eckart–Scuflaire–Osaki (ESO) 分類 (2)

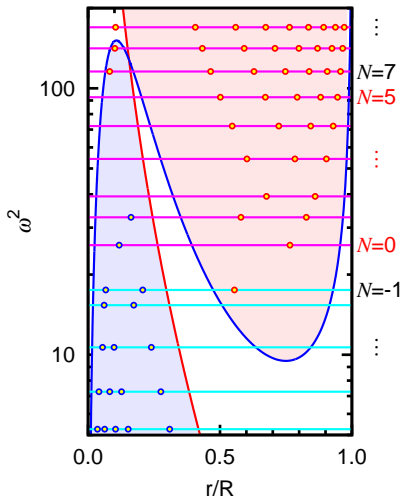
- 中心から表面までのあいだに位相点 ( $\xi_r, \xi_h$ ) が (位相図上の) 原点の回りを正味何回転するかによって、各モードを特徴づける
- 固有関数 (変位の動径成分  $\xi_r$ ) の節を、音波的なもの (p 節 ●) と重力波的なもの (g 節 ○) に分類
- [モード指数  $N$ ] = [●の数] - [○の数]  
各  $N$  にちょうど1つずつ固有モードが対応
  - $N > 0$ :  $p_N$  モード
  - $N = 0$ :  $f$  モード ( $\ell \geq 2$  の場合)
  - $N < 0$ :  $g_{|N|}$  モード
- Cowling 近似をせずに、数値計算で得られる固有関数に適用しても、ほとんどの場合にうまくいく

# 双極子モード問題

指数 4 のポリトロープ,  $\ell = 1$

Lee (1980), Guenther (1991),  
Christensen-Dalsgaard & Mullan (1994)

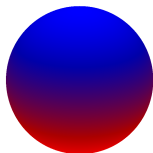
- 中心集中度の高い星の双極子モード ( $\ell = 1$ ) では、ESO 分類が破綻する
  - モード指数  $N$  が不連続
  - fモードの指数  $N = 0$  が pモードに割り当てられる
- 低次の双極子モードでは、Cowling 近似がよくないことが原因



# 双極子モード

もっとも単純なパターンの非動径振動

- (軸対称なものは)  
赤道面に対して反対称な振動
  - 中心集中度の高い星ほど、また低い(長波長)モードほど、Cowling近似は悪くなる  
(より重く大きいものが動くほど重力場は変化する)
  - 動径方向に節のない振動(fモード)は禁止  
(星全体の重心移動となるから)
- ⇒ 他の非動径モードにはない特殊事情



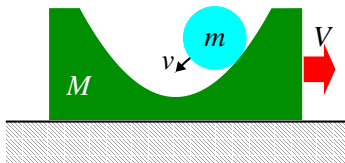
$$\ell = 1, m = 0$$



# 双極子モードの理論 (1)

- 「fモード禁止」の理由をよくよく考えてみると...
- ⇒ 双極子モードに特有の運動量保存の関係式が存在
- 重力ポテンシャルの変化を考慮した解析が可能に (Cowling 近似は不要)

台上の質点運動のたとえ  
( $M \sim m$ )



運動量保存則

$$mv_x + MV = 0$$

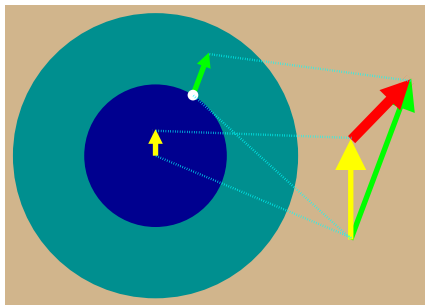
## 双極子モードの理論 (2)

- (双極子モードに限らず) 恒星振動の方程式はハミルトン系として記述できる
- ⇒ 解析力学の手法を援用可能
- 運動量保存則は、第一積分
- ⇒ Cowling 近似を仮定せずに、方程式の階数を 4 階から 2 階に低下
- 数学的には Cowling 近似の場合と同じ形の方程式が得られる
- ⇒ Cowling 近似の場合と同じ解析が可能

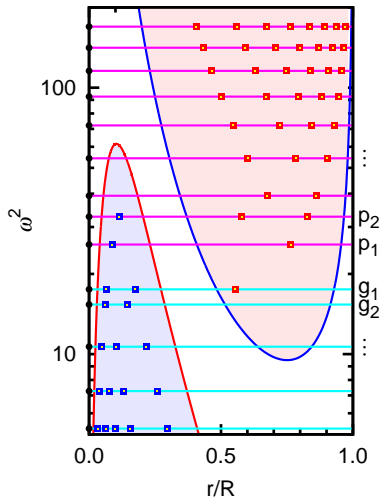
# 双極子モードの理論 (3)

## 双極子モード問題の解決

- **変位**そのものではなく、各半径内の質量中心に対する**相対変位**を考える



## 指数4のポリトロープの場合



□, □: 相対変位の節

# 一般の非動径モード

- $\ell \geq 2$  での Cowling 近似なしの解析は、依然として未解決問題
- 4 階の常微分方程式をどう取扱うかが問題  
ESO 分類や双極子モードの分類法の基礎には、2 階の方程式にのみ適用可能な取扱いがあり、4 階の方程式の解析には使えない

# まとめ

- 近年さまざまな星で振動が高い精度で観測されるようになり、恒星振動という現象を理論的により深く理解することが重要になってきている
- 球対称な星の固有振動のスペクトルや固有関数の構造を一般的に理解することは、基本的に重要な問題
- 動径振動については古くから定性的な理解が得られている
- 非動径振動のうち、双極子モードの理解については、最近になってようやく動径振動と同程度になった
- 一般の非動径モードに対する理解は依然として不十分

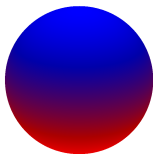
# 恒星振動研究の初期の歴史

観測	理論
1596 ミラの変光, Fabricius	
1784 セファイドの変光, Goodricke	
1895 RR Lyr の変光, Bailey	1863 一様非圧縮球の非動径振動, Kelvin
1902 $\beta$ CMa ( $\beta$ Cep 型), Frost	1879 動径振動, Ritter
	1917 動径振動, Eddington
	1938 非動径振動, 一様圧縮球の解析解, Pekeris
	1941 非動径振動, モード分類, Cowling
	1951 非動径振動, $\beta$ CMa, Ledoux
	1953 動径振動, セファイド励起機構 ( $\kappa$ メカニズム), Zhevakin
1960 太陽 5 分振動, Leighton ら	⋮
1968 白色矮星 (HL Tau 76) の変光, Landolt	
⋮	

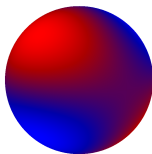
変位の表式

$$\vec{\xi} = \Re \left( \left\{ \xi_r(r) Y_\ell^m(\theta, \phi) \vec{e}_r + \xi_h(r) \left[ \frac{\partial Y_\ell^m}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_\ell^m}{\partial \phi} \vec{e}_\phi \right] \right\} e^{i\sigma t} \right)$$

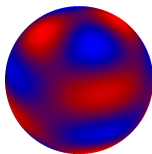
角次数  $\ell$ : 表面の節線の総数 / 偏角次数  $m$ : 経度方向の節線の数



$\ell = 1, m = 0$



$\ell = 2, m = \pm 1$



$\ell = 5, m = \pm 2$

# Sturm–Liouville 問題 (1)

$a \leq x \leq b$  で定義された境界値問題

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [\lambda r(x) + q(x)] y = 0$$

- $\lambda$  は定数
- $a \leq x \leq b$  で  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $r(x)$  は連続かつ  $p(x) > 0$ ,  $r(x) > 0$
- 境界条件:

$$\alpha_a y'(a) + \beta_a y(a) = 0, \quad \alpha_b y'(b) + \beta_b y(b) = 0$$

$[\alpha_{a,b}, \beta_{a,b}]$  は (有限) 定数



## Sturm–Liouville 問題 (2)

- 特定の  $\lambda$  の値 (固有値) に対してしか自明でない解  $[y(x) \neq 0]$  はない
- 固有値全体  $\{\lambda_n\}$  は単調増加列をなし, 上限はない  
( $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \rightarrow \infty$ )
- $n$  番目の固有関数  $y_n(x)$  は  $a < x < b$  に  $n$  個の零点をもち、 $y_n(x)$  の隣り合う零点のあいだに  $y_{n-1}(x)$  の零点がある
- 固有関数は完全直交系をなす  
直交性:

$$m \neq n \text{ ならば } \int_a^b y_m(x) y_n(x) r(x) dx = 0$$

# 動径振動の式

動径・線形・断熱振動の方程式

$$\frac{d}{dr} \left( r^4 \Gamma_1 p \frac{d\xi}{dr} \right) + \xi \left\{ \sigma^2 \rho r^4 + r^3 \frac{d}{dr} [(3\Gamma_1 - 4) p] \right\} = 0$$

$r$ : 半径,  $\xi = \delta r$ (変位)/ $r$ ,  $\sigma$ : 角振動数,  
 $\Gamma_1$ : 断熱指数,  $p$ : 圧力,  $\rho$ : 密度

● 境界条件:

$$\text{中心で } \delta r = r\xi = 0$$

$$\text{表面で } \delta p = -\Gamma_1 p \left( 3\xi + r \frac{d\xi}{dr} \right) = 0$$

( $\delta p$  は圧力のラグランジュ摂動)

●  $r^4 \Gamma_1 p$ ,  $\rho r^4$  は中心, 表面で 0 になるので, この問題は厳密には Sturm–Liouville 問題ではないが, 詳しく調べると, 標準的な Sturm–Liouville 問題と共通の性質を持つことが知られている

# 非動径振動の式 (Cowling 近似)

$$\frac{d\mathbf{Y}_r}{dr} = h(r) \frac{r^2}{c^2} \left( \frac{\mathcal{L}_\ell^2}{\sigma^2} - 1 \right) \mathbf{Y}_h, \quad \frac{d\mathbf{Y}_h}{dr} = \frac{1}{r^2 h(r)} (\sigma^2 - \mathcal{N}^2) \mathbf{Y}_r$$

$\mathbf{Y}_r \propto \xi_r$  (変位の動径成分),  $\mathbf{Y}_h \propto \xi_h$  (変位の水平成分),  
 $r$ : 半径,  $\sigma$ : 角振動数,  $c$ : 音速,  $h(r)$ : 正の (連続) 関数

- 臨界周波数:

$$\mathcal{L}_\ell^2 = \frac{\ell(\ell+1)c^2}{r^2}, \quad \mathcal{N}^2 = g \left( \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{dr} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right)$$

(Lamb 周波数)                      (Brunt-Väisälä 周波数)

- $\sigma^2 > \max[\mathcal{L}_\ell^2, \mathcal{N}^2]$ : 音波的振動
- $\sigma^2 < \min[\mathcal{L}_\ell^2, \mathcal{N}^2]$ : 重力波的振動

# 双極子振動の式

$$\frac{d\mathcal{Z}_r}{dr} = \tilde{h}(r) \frac{r^2}{c^2} \left( \frac{\tilde{\mathcal{L}}_1^2}{\sigma^2} - 1 \right) \mathcal{Z}_h, \quad \frac{d\mathcal{Z}_h}{dr} = \frac{1}{r^2 \tilde{h}(r)} (\sigma^2 - \tilde{\mathcal{N}}^2) \mathcal{Z}_r$$

- Cowling 近似の場合と形は同じ
- 従属変数の変更:

$$\mathcal{Y}_r \Rightarrow \mathcal{Z}_r \propto \xi_r - \mathbf{d}_r, \quad \mathcal{Y}_h \Rightarrow \mathcal{Z}_h \propto \xi_h - \mathbf{d}_h$$

$\mathbf{d}_r$  ( $\mathbf{d}_h$ ): 半径  $r$  以内の質量中心の変位の動径 (水平) 成分

- 臨界周波数の変更:

$$\tilde{\mathcal{L}}_1^2 = \mathcal{L}_1^2 \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_{\text{av}}} \right)^2, \quad \tilde{\mathcal{N}}^2 = \mathcal{N}^2 \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_{\text{av}}} \right)^{-2}$$

$\rho_{\text{av}}$ : 半径  $r$  内の質量の平均密度

# Cowling 近似の妥当性

- 重力ポテンシャルの摂動  $\Phi'$  と密度の摂動  $\rho'$  の関係

$$\Phi'(\vec{r}) = -G \int \frac{\rho'(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} d\vec{r}_1$$

- (動径方向または水平方向に) 波長の短い振動では、 $\rho'$  が 0 のまわりを (空間的に) 激しく振動する
- ほぼ同じ場所にある各質量素片からの  $\Phi'$  への寄与は、互いにほとんど打ち消しあうので、 $\Phi'$  はほとんど 0 になる
- 星の外層では通常密度が小さいので、摂動  $\rho'$  も小さくなる
- ( $\rho'$  が同じなら)  $\Phi'$  への寄与は近くの質量からのものほど大きいですが、外層では  $\rho'$  は小さいので、近くからの寄与も小さい

# 数値計算では不十分？

- 数値計算は、特定の恒星モデルの性質を定量的に評価するのに適する
- ⇒ すべてのモデルに共通の定性的な性質を厳密に調べるのには適さない
- 計算したモードが、どの種類の何番目のモードかを判定する方法が必要（モード分類の問題）
- ⇒ 今のところ厳密な分類方法はない